DAS GUMBELSCHE ABSTERBEGESETZ

Inauguraldissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans Rudolf Streit
von Zimmerwald

BERN
Gedruckt bei Stämpfli & Cie.
1934

DAS GUMBELSCHE ABSTERBEGESETZ

Inauguraldissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans Rudolf Streit
von Zimmerwald

BERN
Gedruckt bei Stämpfli & Cie.
1934

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag von Herrn Prof. Friedli angenommen.

Bern, den 15. Februar 1934.

Der Dekan:
E. Hugi.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel. Seite

Herleitung des Gumbelschen Gesetzes und Kritik an den zugrunde gelegten Betrachtungen 1

II. Kapitel.

Bestimmung der Parameter beim Gumbelschen Gesetz 10

III. Kapitel.

Genaue Erfassung der Gesetzmässigkeit des Lebens und Sterbens 12

IV. Kapitel.

Mathematische Behandlung einiger Versicherungsprobleme beim Gumbelschen Gesetz 20

1. Gewisse versicherungswissenschaftliche Funktionen, wenn das Gumbelsche Gesetz als Absterbeordnung zugrunde gelegt wird 20
2. Eine andere mathematische Formulierung des Absterbegesetzes . . . 23
3. Aufstellen einer neuen Absterbeordnung mit Hilfe der Interpolation einer schon berechneten Tafel 25
4. Leibrentenproblem in kontinuierlicher und diskontinuierlicher Betrachtung 30
5. Weitere Versicherungswerte in kontinuierlicher und diskontinuierlicher Betrachtung 39
6. Das Problem der Verbindungsrente (Gesetz des gleichmässigen Alterns) 41
7. Das Zinsfussproblem 44
8. Herleitung verschiedener Versicherungswerte einer beliebigen Gumbelschen Absterbeordnung aus dem vollständigen System einer Standardtafel 50

V. Kapitel.

Zusammenfassung der Resultate 58

Die eingeklammerten Zahlen im Text beziehen sich auf das Literaturverzeichnis im Anhang dieser Arbeit.

Es ist mir ein Bedürfnis, meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. Ch. Moser, Herrn Prof. Dr. L. Crelier und Herrn Prof. Dr. W. Scherrer, an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen für alle die vielseitigen Anregungen, die ich während der Studienzeit von ihnen erfahren durfte.

Ganz besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. W. Friedli, unter dessen umsichtiger Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist.

I. Kapitel.

Herleitung des Gumbelschen Gesetzes und Kritik an den zugrunde gelegten Betrachtungen (1) (2).

1. Wir betrachten die Häufigkeit der mittleren Sterbealter in einer stationären Bevölkerung:

Der kleinste Wert ist das Sterbealter der über Nulljährigen, seine Häufigkeit ist die grösste, weil der Gesamtbevölkerung dieser Wert zukommt. Mit wachsendem Alter steigt die Grösse des mittleren Sterbealters, seine Häufigkeit fällt aber, da es sich auf eine immer kleinere Bevölkerung bezieht. Das ist ein typisches Merkmal eines Fehlers. Gumbel trifft deshalb die Annahme, dass die Häufigkeit des mittleren Sterbealters einem Gaussschen Fehlergesetz gehorcht. Dieses lautet allgemein:

$$\varphi(f) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 f^2} \qquad [1]$$

wo $\varphi(f)$ die Häufigkeit des Fehlers f bedeutet. In unserem Fall ist die Fehlerhäufigkeit gleich der Anzahl der Lebenden l_x des Alters x. Als Fehler fassen wir nun die Abweichung eines beliebigen mittleren Sterbealters von seinem theoretisch häufigsten Wert H auf. Bei $f = H$ hat somit $\varphi(f)$ ein Maximum. Das mittlere Sterbealter der x-jährigen ist gegeben durch $x + \mathring{e}_x$, wo $\mathring{e}_x$ die mittlere künftige Lebenserwartung ist. Der Fehler erhält also den Wert:

$$f = \pm [H - (x + \mathring{e}_x)]$$

Eingesetzt gibt es:

$$\varphi(f) = l_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 [x + \mathring{e}_x - H]^2} \qquad [2]$$

Der multiplikative Faktor $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ kann weggelassen werden, wenn wir von der Annahme ausgehen, dass $l_0 = 1$ sei. Damit betrachten wir eigentlich die Überlebenswahrscheinlichkeit $\frac{l_x}{l_0}$.

Bekanntlich kann statt der Präzisionskonstanten h im Gaussschen Gesetz die Streuung τ eingeführt werden durch die Beziehung:

$$h = \frac{1}{\tau\sqrt{2}}$$

Folglich geht [2] über in:

$$l_x = e^{-\frac{1}{2\tau^2}(x+\mathring{e}_x-H)^2} \qquad [3]$$

Dies ist das Gumbelsche Gesetz.

In unserem Falle hat natürlich nur der fallende Teil des Verlaufes der Gaussschen Kurve einen Sinn, da l_x mit wachsendem $x + \mathring{e}_x$ stets abnehmen muss.

Es sind τ und H zwei Konstanten, die aus der Beobachtung zu bestimmen sind. Beide haben die Dimension eines Alters, und Gumbel zeigt, dass H die Rolle einer Lebenserwartung und τ die eines mittleren Alters der Lebenden spielt.

In unserer Beziehung für l_x muss $\mathring{e}_x$ durch eine Relation zwischen den Konstanten und x ersetzt werden. Zunächst gilt für die Sterbensintensität:

$$\mu_x = \frac{1}{\tau^2}(x + \mathring{e}_x - H)(1 + \mathring{e}'_x)$$

Da aber allgemein die Relation

$$\mu_x = \frac{1 + \mathring{e}'_x}{\mathring{e}_x}$$

erfüllt ist, folgt sofort:

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2}\left(H - x + \sqrt{(H-x)^2 + 4\tau^2}\right)$$

und damit: $$l_x = e^{-\frac{1}{8\tau^2}\left(x-H+\sqrt{(x-H)^2+4\tau^2}\right)^2}$$

oder kurz: $$l_x = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

worin $$u = \frac{1}{2\tau}\left(x - H + \sqrt{(x-H)^2 + 4\tau^2}\right)$$ ist.

In dieser Formulierung hat Gumbel sein neues Absterbegesetz gegeben.

2. Bevor wir das Gumbelsche Absterbegesetz im besondern betrachten, wollen wir uns einmal überlegen, was für Gründe dafür oder dagegen existieren, dass man mit einfachen Annahmen ein Absterbegesetz aufstellen kann.

Das Absterben einer Gesamtheit von Menschen erstreckt sich erfahrungsgemäss über etwa 100 Jahre. Für das Sterben an sich sind eine ganze Reihe von Faktoren verantwortlich; die wichtigsten sind etwa:

a) altern;
b) Krankheiten;
c) soziale Einflüsse;
d) klimatisch-geographische Einflüsse;
e) anfängliche Widerstandskraft oder Widerstandslosigkeit des Neugeborenen (ererbte Eigenschaften).

Durchgehen wir diese einzelnen Sterbensursachen der Reihe nach. Die erste ist wohl am unklarsten definiert, denn die Altersschwäche ist eine der seltensten Todesursachen. Gewöhnlich ist eben doch eine Krankheit die direkte und irgendein sozialer, klimatisch-geographischer oder ererbter Einfluss die indirekte Ursache am Tode. Wir wollen eigentlich nur aussagen, dass die Widerstandskraft des menschlichen Körpers mit wachsendem Alter abnimmt. Dies stimmt allerdings erst von einem gewissen Alter (ungefähr 13) an, da vorher gerade das umgekehrte der Fall ist (Kindersterblichkeit). Die einzelnen Krankheiten sind, wie das schon gesagt wurde, in hohem Masse durch soziale, klimatisch-geographische oder ererbte Ursachen bedingt. So gibt es eine ganze Reihe von Krankheiten, die örtlich beschränkt sind (z. B. Tropenkrankheiten), weiter solche, die eine bestimmte Berufsgruppe (z. B. Phosphorkrankheit in der Zündholzindustrie) oder eine Gemeinschaft mit sonst gleichen Lebensbedingungen (z. B. Skorbut) vorwiegend treffen, während sie sonst fast gar nicht auftreten. Ferner kennt man Krankheiten, die nur in gewissen Altersgruppen wirken, dort aber meist sehr stark (ausgesprochene Säuglings- und Kinderkrankheiten und ausgesprochene Alterskrankheiten), aber auch solche, die fast durch alle Lebensalter von konstanter Grösse sind. Ein Beispiel für die verschiedene Wirkung der einzelnen Krankheiten erhält man, wenn man die Sterblichkeit durch

Tuberkulose (Berechnung Steiner, S. M. 1901—1910) (3) mit derjenigen für Krebs (Berechnung Wyss, S. M. 1901—1910) (4) vergleicht. Während Krebs hauptsächlich die alten Leute trifft, ist Tuberkulose insbesondere eine Todesursache der mittleren Alter (5).

Aus dieser Betrachtung können wir sehen, wie schon das Absterben einer an sich vollkommen homogenen Gesamtheit (für die wir die Faktoren *c*, *d*, *e*, als für alle betrachteten Personen vollkommen gleich voraussetzen) einen komplizierten und verwickelten Vorgang darstellt. Wenn wir jetzt noch bedenken, dass wegen der Wirkung von sozialen, klimatisch-geographischen und ererbten Einflüssen diese homogene Gesamtheit nie verwirklicht sein kann, so ist es begreiflich, dass der Verlauf der Absterbeordnung als Ganzes so kompliziert ist.

Bei den beiden ersten Gruppen von Ursachen ist zwar noch eine gewisse Annäherung an den gewünschten Idealzustand möglich durch das gesonderte Betrachten von gewissen Berufsgruppen und die Aussonderung nach bestimmten beschränkten Gebieten. Für die ererbten Einflüsse aber haben wir keine Möglichkeit der Vereinfachung, da man über die Grösse und Wirkung der einzelnen Komponenten noch sehr im unklaren ist.

Das Absterben der Menschen, als Massenerscheinung betrachtet, ist somit von sehr komplizierter, innerer Struktur. Um ein wirklich mathematisches Gesetz der Sterblichkeit zu geben, müssen wir jede absolute Einzeltodesursache (Wirkung irgendeiner einzigen Krankheit oder der Altersschwäche auf eine sonst vollkommen homogene Gesamtheit) für sich betrachten, ihre Gesetzmässigkeit erkennen; durch die Verknüpfung der Einzelergebnisse nach Grösse und Häufigkeit würden wir dann auch ein Gesetz für den Gesamtvorgang erhalten. Jedes Einzelgesetz würde für die mathematische Formulierung eine Reihe von Konstanten und eine oder mehrere Variablen (worunter das Alter) benötigen.

Fragen wir uns, was für Gründe vorhanden sein könnten, dass diese kompliziert gebaute Formel für den Gesamtvorgang sich auf eine Funktion von einfacherem Charakter mit einigen wenigen Konstanten reduziert, so finden wir höchstens den, dass sich einzelne Ursachen in ihren Wirkungen hemmen oder auslöschen können, womit auch die entsprechenden Parameter aus der Rechnung verschwinden.

Bedenken wir weiter, dass unter dem Einfluss der fortschreitenden medizinischen Erkenntnisse einerseits und der ständig wechselnden sozialen Verhältnisse andererseits eine Reihe von Todes-

ursachen abnimmt oder schon erloschen ist (z. B. Pest), während ebenfalls eine Anzahl neu auftritt (z. B. Verkehrs- und Fabrikunfälle), so erkennen wir, dass die innere Struktur des Absterbens einer ständigen Umlagerung unterworfen ist. Diese kann ein viel grösseres Ausmass erreichen, als die Änderung der Absterbeordnung als Ganzes nach aussen vermuten lässt.

Die Funktionen von einfachem Bau, die das Sterben der Menschen darstellen sollen, sind somit keine Gesetze, sondern rein hypothetisch aufgestellte Formeln, die allerdings in vielen Fällen eine gute Anpassung an die empirische Beobachtungsreihe geben können. Sie tragen aber der innern Struktur nicht Rechnung und sind in ihrem Charakter reine Interpolationsformeln. Es wurden schon einige rohe Versuche unternommen, durch das gesonderte Betrachten der Sterblichkeit einzelner Altersgruppen diesem innern Aufbau mehr Rechnung zu tragen (Pearson: Säuglingsalter, Kindheit, Jugend, mittleres Alter, hohes Alter. Fisher: Jugend, frühes und spätes mittleres Alter, frühes, mittleres und spätes Greisenalter, Tuberkulose- und Berufstodesfälle). Alle diese Versuche gehen aber zu wenig in die Einzelheiten, um eine adäquate Darstellung zu erreichen. Das Aufstellen eines Absterbegesetzes mit Hilfe der gesonderten Betrachtung jeder einzelnen Todesursache ist wohl wegen der Kompliziertheit der Aufgabe überhaupt nicht möglich. Damit ist es aber fast ausgeschlossen, eine sinnvolle und endgültige mathematische Formulierung für den Vorgang des Absterbens einer Gesamtheit von Personen zu finden.

Unter allen bis jetzt bekannten Absterbegesetzen ist das Makehamsche (mit seiner Erweiterung auf das Kindheitsalter, das Lazarussche Gesetz) das weitaus genaueste und für die Praxis wichtigste.

3. Wir haben gesehen, dass Gumbel mit Hilfe einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegung ein Absterbegesetz aufgestellt hat. Er hat die empirische Häufigkeitskurve der mittleren Sterbealter durch eine Gausssche Fehlerkurve ersetzt. Gumbel weist in seiner Arbeit darauf hin, dass alle nicht wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen nur Versuche seien, die Erfahrung rein mathematisch wiederzugeben, sie zu interpretieren, nicht sie als Massenvorgang zu erklären. Diese Feststellung ist offenbar richtig, aber das Gumbelsche Gesetz gibt keine bessere Erklärung, als irgendein anderes Gesetz es tut. Die Überlegung, die zu ihm führt, hat so viel Willkürliches an sich wie die Annahme über die Sterbensintensitäten, die zum Make-

hamschen Gesetz führt. Beide Gesetze stimmen für den Praktiker nur dann, wenn die empirischen Werte eine Ausgleichung nach einer dieser Methoden gestatten.

Zur Herleitung des neuen Absterbegesetzes sind scheinbar Überlegungen verwendet worden, wie sie in der modernen Physik üblich sind. Bei der toten Materie ist aber die Forderung einer annähernd homogenen Gesamtheit viel leichter erfüllbar als bei Lebewesen, und es ist deshalb klar, dass man bei physikalischen Versuchen die einzelnen Einflüsse durch geschickte Untersuchungsanlage fast vollständig isoliert voneinander erhält. Durch wiederholte Versuche bekommt man auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage ein Gesetz, das eben auch eine Erklärung des Einzelvorganges liefert. Verknüpfen wir diese Einzelergebnisse nach Grösse und Auftreten, so erhalten wir notwendig auch eine Gesetzmässigkeit des Gesamtvorganges.

Wie wir aber soeben gesehen haben, beruht das Gumbelsche Gesetz auf einer hypothetischen Annahme, die der inneren Struktur nicht Rechnung trägt. Infolgedessen kann diese Funktion auch nicht eine Erklärung für unsern komplizierten Massenvorgang liefern. Dass das Gumbelsche Gesetz tatsächlich nur eine Ausgleichungsformel ist, zeigt sich schon daran, dass im praktischen Beispiel nicht einmal die Hälfte einer Gaussschen Fehlerkurve verwendet wird. Das bedeutet, dass der theoretisch häufigste Fall des mittleren Sterbealters $x + \mathring{e}_x = H$ in Wirklichkeit überhaupt nicht realisierbar ist.

Dagegen gestatten die Konstanten τ und H eine einfache Deutung. Beide haben die Dimension eines Alters. Gumbel beweist folgende Zusammenhänge: Mit zunehmenden Werten der empirischen Lebenserwartung eines Neugeborenen wächst bei gleichbleibendem mittlerem Alter der Lebenden die Konstante H und fällt die Konstante τ. Wachsen dagegen die empirischen Werte des mittleren Alters der Lebenden, so fällt bei gleichbleibender Lebenserwartung H und wächst τ. H spielt also die Rolle einer Lebenserwartung und τ die eines mittleren Alters der Lebenden.

Aus: $$\mathring{e}_x = \frac{1}{2}\left(H - x + \sqrt{(H-x)^2 + 4\,\tau^2}\right) = H$$

erhalten wir: $$x = \frac{\tau^2}{H}$$

Dieses Alter hat bei allen von Gumbel berechneten Absterbeordnungen einen Sinn, mit Ausnahme der Überlebensordnungen Indien M. 1901—1910 und Indien W. 1901—1910, wo das Alter zu gross (über 100) wird. Bezeichnen wir der späteren Entwicklung entsprechend mit $B(z)$ die Summe der Lebenden über dem Alter z in der stationären Bevölkerung, so erhalten wir die Integralbeziehung:

$$\bar{x}(x) = x + \frac{\int_x^\infty B(z)\,dz}{B(x)} = \tau$$

Aus ihr könnte x bestimmt werden. Anhand der Gumbelschen Berechnungen, durch Vergleichen der empirischen mittleren Alter aller Lebenden $\bar{x}(0)$ mit den Konstanten τ finden wir, dass sich diese Beziehung nur bei einigen wenigen Tafeln mit einem sinnvollen Alter erfüllt (oft wird nämlich τ kleiner als $\bar{x}(0)$; das zugehörige x würde also bei vielen Tafeln negativ). Daraus folgt, dass die Deutung der Konstanten wohl wesentlich einfacher, aber nicht überzeugender als beim Makehamschen Gesetz wird. Dort gilt nämlich:

$$\mu(0) = -\log s - \log g \log c$$
$$\mu'(0) = -\log g (\log c)^2$$

Dabei ist aber das Makehamsche Gesetz gerade für die Neugeborenen nicht erfüllt.

4. Gumbel hat sich wohl durch die Tatsache beeinflussen lassen, dass das Gaußsche Fehlergesetz in der Vererbungslehre, wie bei der Grössenverteilung individueller Merkmale, ständig auftritt und gute Resultate liefert. Er hat auch mit Hilfe von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen eine Absterbeordnung von Glühbirnen und eine solche für die Fliege Drosophila pure vestigials aufgestellt (6). In beiden Fällen verwendet er das von Lexis gegebene Absterbegesetz:

$$l_x = l(\xi)\left[1 - \Phi(h(x-\xi))\right]$$

Es geht von der Überlegung aus, dass die Sterbefälle um ihr Maximum beim Alter ξ zufällig verteilt sind, also von der Annahme:

$$-\frac{d\,l_x}{d_x} = l(\xi)\frac{2h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2(x-\xi)^2}$$

h und ξ sind dabei zwei Konstanten, die aus der Beobachtung zu bestimmen sind. Im Falle der Glühbirnen hat diese Betrachtung sicher ihre Berechtigung; denn wenn wir eine Serie gleichartiger elektrischer Lampen vor uns haben, sie der gleichen Stromstärke und Spannung aussetzen, so ist ihr Ausbrennen vom Zufall bedingt. Bei der genannten Fliegenart erfasst das gegebene Gesetz den betrachteten Vorgang bis zu einem gewissen Grade ebenfalls sinnvoll. Denn die Forderung einer homogenen Gesamtheit ist hier durch die Beobachtungsanlage sehr weitgehend erfüllt (gleiche Lebensbedingungen der Fliegen, deshalb auch weitgehende Übereinstimmung in ihrer Todesursache). Die Annahme, dass das Absterben dieser Gesamtheit von Lebewesen vollkommen vom Zufall beherrscht werde, stimmt aber nicht absolut. Das verwendete Gesetz kann höchstens als eine Annäherung an das wirklich geltende betrachtet werden. Gumbel findet in beiden Fällen eine sehr gute Anpassung der theoretischen Werte an die empirische Beobachtungsreihe.

Das Absterben der Menschen ist ein viel komplizierterer Vorgang und von so vielen Nebenbedingungen abhängig, dass wir praktisch nie auch nur angenähert den Fall erhalten, der dem Schema der Glühbirnen entspricht. Die Annahme, dass man nur den Tod durch das Altern mit dem auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage aufgebauten Gumbelschen Gesetz darstellt, fällt dahin, da es unmöglich ist, eine empirische Überlebensordnung aufzustellen, die nur den Tod durch das Altern wiedergibt und da Gumbel doch seine Konstanten nach einer gewöhnlichen Absterbeordnung bestimmt.

Neben dem mathematisch-statistischen Ziel ist namentlich noch der Standpunkt des Versicherungstechnikers zu würdigen. Für diesen kommt es nur darauf an, eine bequeme Funktion zu erhalten, die seine Beobachtungsreihe möglichst genau wiedergibt. Unter diesem Gesichtspunkt werden wir das Gumbelsche Gesetz einer näheren Betrachtung zu unterziehen haben.

5. Wir wollen uns noch mit der von Gumbel angestellten wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegung näher auseinandersetzen. Durchgehen wir einige Ableitungen des Gaußschen Fehlergesetzes, so erkennen wir nämlich, dass diese Überlegung an sich falsch ist. Denn überall, wo die Gaußsche Funktion als Fehlergesetz verwendet wird und verwendet werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

a) Es muss ein mittlerer Fehler (0-Fehler) auftreten, der zugleich der häufigste ist.

b) Die Kurve muss zwei symmetrische Äste haben (die Abweichungen vom mittleren Fehler sind zufällig verteilt).

c) Je grösser der Fehler ist, um so kleiner ist die Häufigkeit, mit der er auftritt.

Von diesen drei absolut notwendigen Bedingungen für die angenäherte Fehlerverteilung durch die Gausssche Funktion ist bei der Gumbelschen Hypothese nur die letzte erfüllt. Daraus ergibt sich sofort, dass die mittleren Sterbealter nicht einem solchen Gesetz folgen können, sondern dass ihr empirischer Verlauf sich höchstens angenähert durch ein Stück der Glockenkurve darstellen lässt. Damit ist aber erwiesen, dass das Gumbelsche Absterbegesetz nur eine Ausgleichungsformel ist. Bei der Lexis'schen Funktion sind alle drei wesentlichen Punkte erfüllt, und der Versuch, auf diesem Wege ein Absterbegesetz zu erhalten, ist dort vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus viel weniger kritisierbar als im Fall von Gumbel. Allerdings stimmt das Gesetz von Lexis mit den Beobachtungswerten nur für die hohen Alter ungefähr überein.

Wir wollen mit unserer Betrachtung nicht etwa sagen, dass es undenkbar sei, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein wirklich sinnvolles Absterbegesetz aufzustellen. Wie unter anderem Eggenberger (7) gezeigt hat, lassen sich die Vorgänge im statistischen Material oft nicht durch das einfache Bernoullische Urnenschema charakterisieren; in vielen Fällen genügt allerdings schon das Schema von Polya, um gute Resultate zu erhalten. Ein Urnenschema, das dem Vorgang des Absterbens einer Gesamtheit entspricht, muss wohl sehr kompliziert gebaut sein. Deshalb können wir höchstens sagen, dass unser Problem mit den einfachen Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht gelöst werden kann.

Im weitern wollen wir, aus diesen Gründen, das Gumbelsche Absterbegesetz ganz einfach als eine Ausgleichungsformel betrachten. Um über seine praktische Verwendung in der Versicherungsmathematik zu entscheiden, untersuchen wir folgende drei Punkte:

a) Bestimmung der Parameter;
b) genaue Erfassung der Gesetzmässigkeit des Lebens und Sterbens;
c) mathematische Behandlung von Versicherungsproblemen.

II. Kapitel.

Bestimmung der Parameter beim Gumbelschen Gesetz.

Zunächst wollen wir noch einmal betonen, dass bei variablem u $l_x = e^{-\frac{u^2}{2}}$ als grösstmöglichen Wert eins erreichen kann, d. h. $e^{-\frac{u^2}{2}}$ stellt also in Wirklichkeit die Überlebenswahrscheinlichkeit dar. Die Überlebensordnung wird durch die Beziehung gegeben:

$$l_x = k\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

wo k eine Proportionalitätskonstante ist. In unseren sämtlichen Beispielen des III. Kapitels hat sie den Wert 100 000 (Anzahl der am Anfang betrachteten gleichaltrigen Personen). Für die weiteren mathematischen Untersuchungen setzen wir der Einfachheit halber k immer gleich eins. An den nachfolgenden Ableitungen wird dadurch nichts wesentlich geändert.

Beim Gumbelschen Absterbegesetz treten in der Variablen u zwei Konstanten τ und H auf, grundsätzlich wären also zwei Beobachtungen zu ihrer Bestimmung notwendig, z. B. Berechnung aus den Relationen:

$$l_x = e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}60653 \qquad x = H$$

$$l_z = e^{-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}} = 0{,}27010 \qquad z = \tau + H$$

d. h. für die Alter $x = H$ und $z = \tau + H$ werden die Anzahlen der Lebenden festgehalten.

Eine Methode, die sich jedoch nur auf zwei Beobachtungen stützt, ist ungenau, da sie ganz von diesen zwei Einzelwerten abhängt und dem übrigen Verlauf keine Rechnung trägt. Wir wollen deshalb an Stelle einer solchen unzulänglichen Methode die folgende wählen: Von einem gewissen Alter x_0 an sollen Inhalt und Mittelwert der Sterbetafel erhalten bleiben; es ist dies die sogenannte Momentenmethode. Damit beeinflusst der ganze Verlauf der Absterbeordnung nach dem Alter x_0 die Bestimmung der Konstanten, während alle vorhergehenden Werte nicht zur Einwirkung gelangen. Das ist, wie Gumbel gezeigt hat, wohl die beste Methode zur Bestimmung der

Konstanten, da sie im Vergleich zu andern von Gumbel gegebenen Bestimmungen die genauesten Resultate liefert.

Für die mathematische Herleitung der verwendeten Beziehungen verweisen wir auf Abschnitt 1 im IV. Kapitel unserer Arbeit. Wir erhalten von einem Alter x_0 an den Inhalt der Sterbetafel (Gesamtheit der über dem Alter x_0 Lebenden)

$$B(x_0) = \frac{\tau e^{-\frac{u_0^2}{2}}}{u_0} \qquad [1]$$

und den Mittelwert (durchschnittliches Alter der Lebenden über dem Alter x_0)

$$\bar{x}(x_0) - x_0 = \frac{\tau}{2 u_0}\left[1 - \frac{u_0^2}{2} e^{\frac{u_0^2}{2}} l_i \cdot \left(e^{-\frac{u_0^2}{2}}\right)\right] \qquad [2]$$

In beiden Fällen kann die linke Seite aus der Beobachtung bestimmt werden durch die Beziehungen:

$$B(x_0) = \sum_{z=x_0}^{w} l_z - \frac{l_{x_0}}{2} \qquad [3]$$

$$\bar{x}(x_0) = x_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{B(x_0)}\left[\sum_{x_0+1}^{w} B(z) - \frac{l(x_0)}{12}\right] \qquad [4]$$

Die rechte Seite enthält die beiden Unbekannten τ und u_0. Durch Division ergibt sich:

$$\frac{2}{B(x_0)}\left[\bar{x}(x_0) - x_0\right] = e^{\frac{u_0}{2}} - \frac{u_0^2}{2} e^{\frac{u_0^2}{2}} l_i \left(e^{-\frac{u_0^2}{2}}\right) \qquad [5]$$

Bezeichnen wir die rechte Seite mit $F\left(\frac{u_0^2}{2}\right)$ so folgt:

$$\frac{2}{B(x_0)}\left[\bar{x}(x_0) - x_0\right] = F\left(\frac{u_0^2}{2}\right) \qquad [6]$$

eine Relation, die nur noch eine Unbekannte enthält. Gumbel hat die Funktion $F\left(\frac{u_0^2}{2}\right)$ tabelliert. Wir können also im praktischen Fall

das betreffende u_0 aus dieser Tafel durch Interpolation bestimmen. Damit erhalten wir τ aus der Gleichung [1] und aus der Beziehung

$$H = \tau \left(\frac{1}{u_0} - u_0 \right) + x_0 \qquad [7]$$

auch die Konstante H.

Diese Methode zur Bestimmung der Konstanten ist für die Praxis durchaus anwendbar, und wir können von diesem Standpunkt aus keine Einwendung gegen die Gumbelsche Beziehung als Absterbefunktion machen.

III. Kapitel.

Genaue Erfassung der Gesetzmässigkeit des Lebens und Sterbens.

Gumbel hat für eine ganze Reihe von Absterbeordnungen die Konstanten bestimmt und graphisch die Anpassung der theoretischen an die praktischen l_x-Kurven gezeigt. Allen diesen Darstellungen entnehmen wir folgendes Gemeinsame:

Die theoretischen und die entsprechenden empirischen l_x-Kurven schneiden sich dreimal. Zuerst sind die theoretischen Werte zu klein, schneiden dann die empirische Kurve und bleiben eine Zeitlang zu gross, um nach einem zweiten Schnittpunkt während der ganzen mittleren Lebensdauer unter dieser Kurve zu verlaufen. Im hohen Alter existiert ein dritter Schnittpunkt, und über diesem sind die theoretischen Werte stets grösser als die empirischen. Trotzdem sich die theoretische Kurve der empirischen anschmiegt, entstehen doch sehr wesentliche Unterschiede zwischen ihnen, und man kann die Anpassung an die Beobachtungsreihe nur betrachten als eine erste Annäherung. (Vergleiche die graphischen Darstellungen.)

Gumbel hat für keine seiner berechneten Absterbeordnungen einen Vergleich mit der üblichen Ausgleichungsmethode von Makeham gezeigt. Wir wollen dies zunächst für die Tafel des Textbook (8) tun. Dabei dürfen wir das hier am praktischen Beispiel gefundene Resultat nicht ohne weiteres verallgemeinern. Für Überlebensordnungen, die ähnlich gebaut sind wie die Tafel des Textbook, wird man annähernd zum gleichen Resultat gelangen; für verschieden gebaute, wie sie etwa die indischen Absterbeordnungen darstellen, kann man unter Umständen zu ganz anderen Schlussfolgerungen

kommen. Um diese beiden Absterbegesetze in bezug auf ihre Anpassung an die empirischen Werte genau miteinander vergleichen zu können, müssen wir vom nämlichen Alter an ausgleichen und nachher den Vergleich nur oberhalb dieses Alters durchführen. Gumbel hat in seiner Arbeit die Konstanten der Textbooktafel berechnet; er hat dabei vom Alter 10 an ausgeglichen und erhält für die Konstanten die Werte:

$$H = 58{,}19861 \qquad \tau = 14{,}30690$$

Diese Textbooktafel ist nun ebenfalls nach Makeham ausgeglichen. Durchgehen wir die Ableitung im Textbook, so finden wir die ausgeglichenen und unausgeglichenen Werte von l_x auf Seite 86. Dabei wurde vom Alter 10 an ausgeglichen und die Konstanten des Makehamschen Gesetzes ergaben:

$$\log c = 0{,}03965686 \qquad \log s = -0{,}002689327$$
$$\log g = -0{,}0004568 \qquad \log k = 4{,}0404723$$

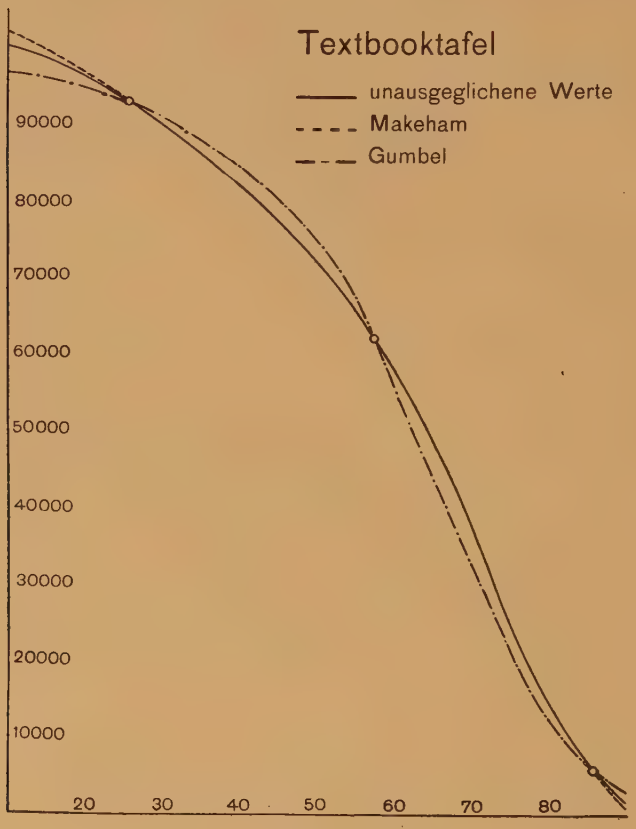
Wir können also die beiden Ausgleichungsmethoden miteinander vergleichen. Für die Gumbelsche Ausgleichung haben wir einige Werte berechnet; dabei wurde u als Funktion von x auf vier Stellen berechnet und l_x durch lineare Interpolation der Tafel 5 von Gumbel (er tabelliert für u die Werte von $e^{-\frac{u^2}{2}}$) bestimmt. Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werten sind gross; die erzielte Annäherung ist nicht von grosser praktischer Bedeutung. Die Gegenüberstellung (Tabelle I) wie die graphische Darstellung (Figur 1) er-

Tabelle I. **Werte für l_x.**

	Unausgeglichen	Makeham	Gumbel
10	100000	102906	96311
20	96155	96350	94607
30	89873	89685	91615
40	82230	82277	86004
50	72743	72795	75274
60	58978	58842	56722
70	37926	37977	32754
80	13919	13987	12994
90	1503	1273	3348

gibt, dass die Ausgleichung nach Makeham ganz wesentlich bessere Resultate liefert als die Methode von Gumbel.

Um einen weiteren Vergleich zwischen der Anpassungsfähigkeit des Gumbelschen und des Makehamschen Gesetzes zu ziehen, haben



Figur 1.

wir auch die Tafel Indien M. 1901—1910 nach dieser zweiten Methode ausgeglichen. Die dazu notwendigen Grundzahlen finden sich im Werke Glovers in Tabelle 77 (9). Wir bestimmen die Konstanten des Makehamschen Gesetzes mit der ersten Methode des Textbooks und wählen $x = 20$ und $t = 15$.

Tabelle II.

x	l_x	log l_x	Δ	Δ^2	log $(-\Delta^2)$
20	43833	4,6418012			
			—0,1430359		
35	31533	4,4987653		—0,0848643	0,9287250—2
			—0,2279002		
50	18658	4,2708651		—0,1397664	0,1454027—1
			—0,3676666		
65	8002	3,9031985			

Mit Hilfe der Tabelle II (Näheres im Textbook Seite 75—77) erhält man die Werte:

$$\log c = 0{,}0144452 \qquad \log s = -0{,}0007906$$
$$\log g = -0{,}104254 \qquad \log k = 4{,}8603812$$

Wir haben damit die Tafel Indien M. 1901—1910 für die Alter 20—65 nach Makeham ausgeglichen. Gumbel hat zur Konstantenbestimmung alle Werte der l_x verwendet, also die Anpassung vom Alter 0 bis zum höchsten Alter durchgeführt. Wollen wir auch für Makeham von 0 an ausgleichen, so versagt die Methode, da die Δ^2 nicht mehr gleiche Vorzeichen erhalten. Den Vergleich führen wir deshalb für die Gumbelsche Ausgleichung 0 bis höchstes Alter und die Makehamsche Alter 20—65 durch. Für Makeham erhalten wir Tabelle III und mit den von Gumbel berechneten Werten $\tau = 32{,}44973$ und $H = 4{,}63456$ ergibt sich Tabelle IV.

Tabelle III.

x	log l_x	x	log l_x	x	log l_x
0	4,7561272	40	4,4343972	70	3,7353592
10	4,7070852	50	4,2708651	80	3,3056732
20	4,6418012	60	4,0459252		
30	4,5538832	65	3,9031985		
35	4,4987653				

Tabelle IV.

x	u	x	u	x	u
0	0,9311	35	1,5719	65	2,2958
10	1,0861	40	1,6838	70	2,4264
20	1,2644	50	1,9191	80	2,6938
30	1,4645	60	2,1675		

Damit bekommen wir als Gegenüberstellung:

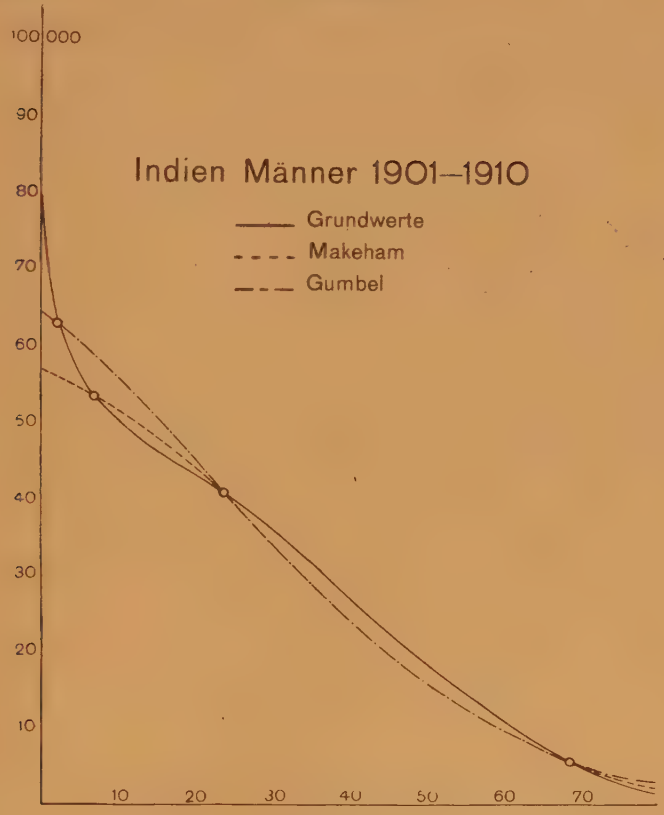
Tabelle V.

	Grundzahlen	Gumbel	Makeham
0	100000	64826	57023
10	50212	55443	50943
20	43833	44962	43833
30	35831	34220	35800
35	31533	29071	31533
40	27136	24230	27189
50	18658	15859	18658
60	11229	9547	11115
65	8002	7169	8002
70	5134	5268	5437
80	1032	2664	2022

Aus dieser Tafel wie aus der graphischen Darstellung (Figur 2) folgt, dass die Makehamsche Ausgleichung schon vom Alter 5 an bis zum höchsten Alter ganz wesentlich bessere Resultate liefert als die Methode von Gumbel. Die gewaltige Kindersterblichkeit dieser indischen Tafel wird von keinem der beiden Gesetze auch nur annähernd erfasst.

Unter anderen Autoren haben Dumas (10), Christen (11) und Kobi (12) darauf hingewiesen, dass die Wahl eines internationalen Standard-c von grösstem Vorteil zur Lösung verschiedener Versicherungsaufgaben wäre. Betrachten wir die Werte von log c für einige Tafeln:

Tafel	log c	Tafel	log c
S. M. 1880/1881	0,0382439	A. F.	0,0380960
S. M. 1889/1900	0,0355816	R. F.	0,0414376
Textbook	0,0396569		



Figur 2.

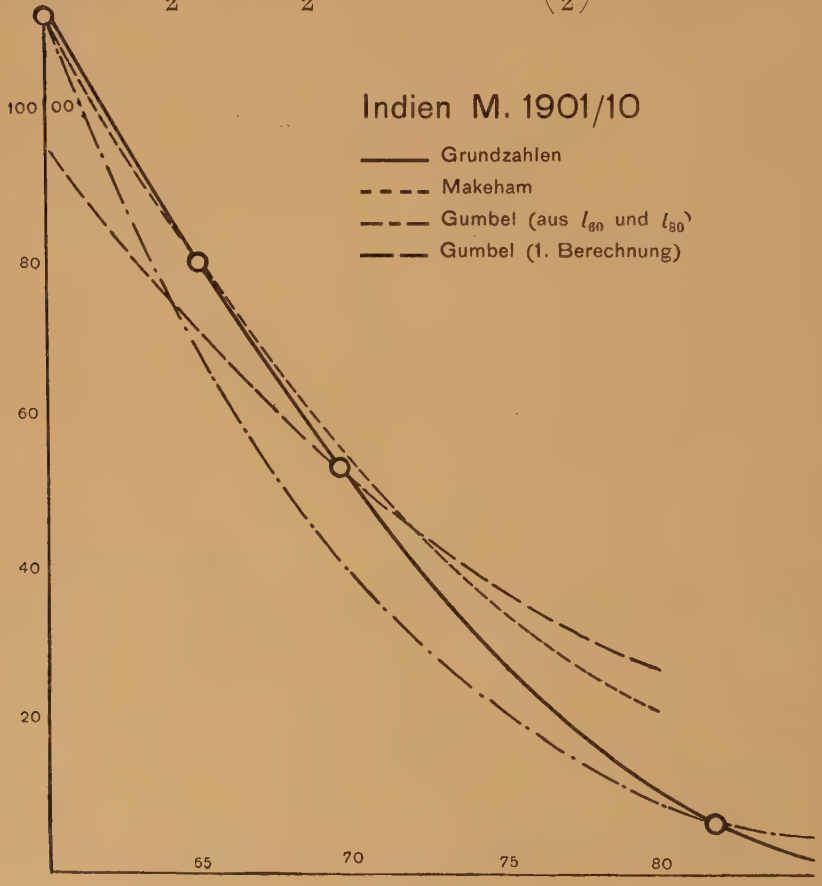
so finden wir, dass der log des Standard-c in der Nähe von 0,04 liegen müsste. Von diesem Wert weicht aber unsere eben berechnete Grösse log $c = 0{,}0144452$ für die indische Tafel M. 1901—1910 erheblich ab. Diese Tatsache führt uns zu folgender Feststellung: Das Makehamsche Gesetz hat die Fähigkeit, sowohl die Absterbeordnung kulturell hoch- wie tiefstehender Bevölkerungen annähernd wiederzugeben. Seine Anschmiegungsfähigkeit an solch verschiedene Personengesamtheiten ist in der Änderungsmöglichkeit der Konstanten c bedingt. Wir können deshalb nur innerhalb kulturell ungefähr gleich hoch stehender Personengesamtheiten von einem Standard-c sprechen.

Im weiteren wurde der Versuch unternommen, zu untersuchen, ob die Gumbelsche Methode bessere Resultate liefert, wenn wir nur für die hohen Alter (etwa von 60 an) ausgleichen. Die Methode der Konstantenbestimmung von Gumbel führt hier nicht zum Ziel, denn es wird für die Absterbeordnung Indien M. 1901—1910:

$$B\,(60) = 1{,}123035$$
$$\bar{x}\,(60) - (60) = 7{,}277844$$

$$\text{also: } F\left(\frac{u^2}{2}\right) = 12{,}96103$$

In seiner Tabelle 10 hat Gumbel jedoch die Funktion $F\left(\frac{u^2}{2}\right)$ nur tabelliert für $\frac{u^2}{2} = 0$ bis $\frac{u^2}{2} = 0{,}5$, was für $F\left(\frac{u^2}{2}\right)$ die Werte 1,00000



Figur 3.

und 2,40953 ergibt. Es ist daher nicht möglich, diese Tafel zur Bestimmung der Konstanten zu benützen. Falls diese Methode angewendet werden sollte, so müsste die erwähnte Tabelle bedeutend erweitert werden, was aber eine umständliche Sache bedeutet, da $F\left(\frac{u^2}{2}\right)$ eine komplizierte Funktion ist.

Die Konstanten τ und H bestimmen wir deshalb durch die Erhaltung zweier Werte für l_x. Wir wählen:

$$l_{60} = 11229 \quad \text{und erhalten:} \quad u_1 = 2{,}09235$$
$$l_{80} = 1032 \qquad\qquad\qquad\quad u_2 = 3{,}02446$$

Damit wird für die Tafel Indien M. 1901—1910:

$$\tau = 18{,}52898 \qquad H = 30{,}08628$$

Mit Hilfe dieser Werte berechnet man Tabelle VI.

Tabelle VI.

x	u	l_x-Grundzahlen	l_x Gumbel
60	2,09235	11229	11229
65	2,31602	8002	6844
70	2,54677	5134	3906
75	2,78326	2736	2079
80	3,02446	1032	1032
85	3,26952	202	492

Aus unserer letzten Berechnung sehen wir, dass es wohl möglich wäre, durch die Erhaltung anderer Werte von Lebenden, etwa l_{65} und l_{80}, im Bereich 60—85 eine etwas bessere Anpassung an die unausgeglichenen Werte zu erreichen. Doch stellen wir aus der graphischen Darstellung (Figur 3) fest, dass die Gumbelsche Ausgleichung die Beobachtungsreihe immer nur in groben Zügen wiedergibt. Die Makehamsche Ausgleichung für die Periode 20 -65 liefert auch im Abschnitt 60—80 eine bedeutend bessere Darstellung der Beobachtungswerte als eine der beiden Gumbelschen Ausgleichungen.

Führt man eine Gumbelsche Ausgleichung durch, so schneidet die ausgeglichene Kurve (von $x = 0$ bis $x = \infty$ betrachtet) die empirische Kurve drei- und nur dreimal. Das zeigt ganz deutlich, dass

diese Gumbelschen Kurven einen ganz bestimmten, starren Verlauf haben. Bei jeder Makehamschen Ausgleichung treten mindestens vier, in der Regel aber bedeutend mehr Schnittpunkte auf, was schon zeigt, dass die Ausgleichung wesentlich besser ist.

Zusammenfassend können wir sagen, dass das Makehamsche Gesetz vom Standpunkt der Erfassung der Gesetzmässigkeit des Lebens und Sterbens weit bessere Resultate liefert als das Gumbelsche. Weshalb das Gumbelsche Gesetz weniger schmiegsam ist als das Makehamsche, werden wir im nächsten Kapitel sehen.

IV. Kapitel.

Mathematische Behandlung einiger Versicherungsprobleme beim Gumbelschen Gesetz.

1. Gewisse versicherungswissenschaftliche Funktionen, wenn das Gumbelsche Gesetz als Absterbeordnung zugrunde gelegt wird.

a) Lebenserwartung, Sterbeziffer, Sterbensintensität und Vitalität. Aus früherem folgt:

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2}\left(H - x + \sqrt{(H-x)^2 + 4\tau^2}\right)$$

was sich mit der Bedeutung von

$$u = \frac{1}{2\tau}\left(x - H + \sqrt{(x-H)^2 + 4\tau^2}\right)$$

auch schreiben lässt:

$$\mathring{e}_x = \frac{\tau}{u}$$

Als Sterbeziffer wird die reziproke Lebenserwartung bezeichnet; wir erhalten für sie:

$$\frac{1}{\mathring{e}_x} = \frac{u}{\tau}$$

Aus $l_x = e^{-\frac{u^2}{2}}$ ergibt sich die Relation

$$\mu_x = u\frac{du}{dx} \quad \text{und da} \quad \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{\tau(1+u^2)}$$

ist, so erfüllt die Sterbensintensität die Beziehung:

$$\mu_x = \frac{u^3}{\tau\,(1+u^2)}$$

und die Vitalität als reziproke Intensität erhält den Wert:

$$\frac{1}{\mu_x} = \frac{\tau\,(1+u^2)}{u^3}$$

b) Die Summenfunktion der Lebenden. Sie stellt die von den l_{x_1} Personen des Alters x_1 noch zu verlebende Zeit dar, oder in der stationären Bevölkerung die Gesamtheit der Lebenden über dem Alter x_1. Also gilt allgemein:

$$B\,(x_1) = \int_{x_1}^{w} l_x\,dx$$

und damit speziell:

$$B\,(x_1) = \tau \int_{u_1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du + \tau \int_{u_1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\frac{1}{u^2}\,du$$

Wird hier das zweite Integral partiell integriert, so folgt:

$$B\,(x_1) = \frac{\tau\,e^{-\frac{u_1^2}{2}}}{u_1}$$

c) Die Summenfunktion der Summenfunktion der Lebenden.

Sie stellt die Zeit dar, die die stationäre Bevölkerung über dem Alter x_1 bis zu ihrem Ableben noch verleben wird. Deshalb ist:

$$\int_{x_1}^{\infty} B\,(x)\,dx = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\tau\,e^{-\frac{u^2}{2}}}{u}\,\tau\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$$

Wir zerlegen die rechte Seite in die beiden Integrale und berücksichtigen weiter die Relation:

$$\int_{u_1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{\frac{u_1^2}{2}}^{\infty} e^{-z}\,\frac{1}{z}\,dz = -\frac{1}{2}\,li\left(e^{-\frac{u_1^2}{2}}\right)$$

$l_i\left(e^{-\frac{u_1^2}{2}}\right)$ stellt hier den bekannten Integrallogarithmus dar. Integrieren wir das zweite Integral noch partiell, so bleibt als Schlussbeziehung:

$$\int_{x_1}^{\infty} B(x)\,dx = \tau^2\left[\frac{e^{-\frac{u_1^2}{2}}}{2\,u_1^2} - \frac{1}{4}\,l_i\left(e^{-\frac{u_1^2}{2}}\right)\right]$$

d) Durchschnittliches Alter der stationären Bevölkerung über dem Alter x_1.

Es ist allgemein gültig:

$$\bar{x}(x_1) = \frac{\int_{x_1}^{\infty} x\,l_x\,dx}{\int_{x_1}^{\infty} l_x\,dx}$$

Da aber $d\,B(x) = -\,l_x\,dx$ ist, so folgt für:

$$\int_{x_1}^{\infty} x\,l_x\,dx = x_1\,B(x_1) + \int_{x_1}^{\infty} B(x)\,dx$$

und durch Einsetzen der früheren Resultate erhalten wir:

$$\bar{x}(x_1) = x_1 + \frac{\tau}{2\,u_1}\left[1 - \frac{u_1^2}{2}\,e^{\frac{u_1^2}{2}}\,l_i\left(e^{-\frac{u_1^2}{2}}\right)\right]$$

$\int_{x_1}^{\infty} x\,l_x\,d_x$ lässt sich durch Ersetzen der entsprechenden Ausdrücke in u auch direkt lösen.

e) Während beim Makehamschen Gesetz die mittlere künftige Lebenserwartung (damit auch die Sterbeziffer) und die Summenfunktion der Lebenden in kontinuierlicher Betrachtung mit je einer Q-Funktion dargestellt werden kann, werden diese beiden Ausdrücke beim Gumbelschen Gesetz einfache Grössen, da die Integrale lösbar sind. In den Beziehungen für das durchschnittliche Alter der stationären Bevölkerung und die Summenfunktion der Summenfunktion der Lebenden treten im Fall von Makeham Q-Funktionen unter dem Integralzeichen auf, im Fall von Gumbel sind nur Integrallogarithmen zur Darstellung notwendig. Sterbensintensität und Vitalität erhalten bei beiden Gesetzen einfache Form.

2. Eine andere mathematische Formulierung des Absterbegesetzes.

In der stationären Bevölkerung bleibt der Umfang und die Altersstruktur des Bestandes erhalten. Deshalb muss die Zahl der Geburten gleich der Zahl der Todesfälle sein. Oder allgemein: In der stationären Bevölkerung ist die Zahl der Todesfälle über einem Alter gleich der Zahl der Personen, die dieses Alter erreichen. Also gilt:

$$l_x = \int_x^\infty l_x \mu_x \, dx = \int_u^\infty e^{-\frac{u_1^2}{2}} u_1 \, du_1$$

Mit Hilfe der Definition für die unvollständige Gammafunktion:

$$Q_x(z) = \int_x^\infty e^{-y} y^{z-1} \, dy$$

erhält man durch Umformung des Integrals:

$$l_x = 2^{\frac{1}{2}} Q_u\left(\frac{3}{2}\right)$$

Für das Makehamsche Gesetz kann man eine analoge Darstellung bekommen (13). Es ist $l_x = k\, s^x\, g^{c^x}$ und $\mu_x = A + B\, c^x$. Berücksichtigen wir weiter:

$$A = \operatorname{Log}\frac{1}{s} \qquad \lambda = c^x \operatorname{Log}\frac{1}{g} \qquad \tau = -\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{c\,s}}{\operatorname{Log} c}$$

$$B = \operatorname{Log} c \operatorname{Log}\frac{1}{g} \qquad \varepsilon = -\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{s}}{\operatorname{Log} c}$$

so folgt:

$$l_x = k\left[\operatorname{Log}\frac{1}{s}\,\frac{Q_\lambda(\varepsilon)}{\operatorname{Log} c\left(\operatorname{Log}\frac{1}{g}\right)^\varepsilon} + \frac{Q_\lambda(\tau)}{\left(\operatorname{Log}\frac{1}{g}\right)^{\tau-1}}\right]$$

Setzen wir in dieser Relation $s = 1$, so erhalten wir für das Gomperzsche Absterbegesetz $l_x = k g^{c^x}$ den Ausdruck:

$$l_x = k\, Q_\lambda \quad (1)$$

Wir haben damit gezeigt, dass wir sowohl die Gumbelsche wie die Makehamsche und Gomperzsche Absterbeordnung durch Q-Funktionen darstellen können. Es ist deshalb nicht verwunderlich, wenn diese unvollständigen Gammafunktionen in gewissen versicherungswissenschaftlichen Funktionen auftreten, wenn wir eines dieser drei Gesetze als Absterbeordnung zugrunde legen.

Vergleichen wir das Makehamsche und das Gumbelsche Gesetz anhand dieser gewonnenen Darstellungen mit Q-Funktionen, so können wir feststellen:

Das Gumbelsche Gesetz ist in seiner Form viel starrer und kann sich deshalb einer vorgegebenen Beobachtungsreihe schlechter anpassen als das Makehamsche Gesetz. Während bei Makeham eine Summe von zwei Q-Funktionen notwendig ist, braucht Gumbel für seine Darstellung nur eine solche Funktion. Die Parameter der unvollständigen Gammafunktion sind beide Male Funktionen des Alters x und der Konstanten der Absterbeordnung. Das Argument ist im Falle von Gumbel konstant und gleich $^3/_2$, im Fall von Makeham sind beide Argumente ε und τ voneinander verschieden und von den Konstanten der Absterbeordnung abhängig.

Erweitern wir diese beiden Absterbegesetze durch Zusatzglieder auch auf die Kindersterblichkeit, so gelangen wir auf die Formel von Lazarus und das erweiterte Gumbelsche Gesetz. Um das letztere herzuleiten, bedienen wir uns folgender Überlegung:

Durch die Annahme des ursprünglichen Gumbelschen Gesetzes entsteht zwischen dem theoretischen l_0 und dem beobachteten eine Differenz $'l_0$. Auf diese $'l_0$ Lebenden übt man ein ganz analoges Gumbelsches Gesetz aus und addiert es zum ersten. Man betrachtet also die Kindersterblichkeit für sich allein und legt ihr einen ähnlichen Verlauf zugrunde wie der Erwachsenensterblichkeit. Wir erhalten:

$$l_x = e^{-\frac{u^2}{2}} + e^{-\frac{'u^2}{2}}$$

wobei allgemein gilt:

$$\tau \neq {}'\tau$$
$$H \neq {}'H$$

In Q-Funktionen ausgedrückt ergibt es:

$$l_x = \sqrt{2}\left[Q_u\left(\frac{3}{2}\right) + Q_{'u}\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

Für die Absterbeformel von Lazarus kann man berechnen:

$$l_x = k\left[\operatorname{Log}\frac{1}{s}\,\frac{Q_\lambda(\nu)}{\operatorname{Log} c\left(\operatorname{Log}\frac{1}{g}\right)^{\nu}} + \frac{Q_\lambda(\varrho)}{\left(\operatorname{Log}\frac{1}{g}\right)^{\varrho-1}} + \operatorname{Log} f \operatorname{Log}\frac{1}{h}\,\frac{Q_\lambda(\tau)}{\operatorname{Log} c\left(\operatorname{Log}\frac{1}{g}\right)^{\tau}}\right]$$

Dabei muss gelten:

$$\lambda = c^x \operatorname{Log}\frac{1}{g},\quad \nu = -\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{s\,h^f}}{\operatorname{Log} c},\quad \varrho = -\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{s\,c\,h^f}}{\operatorname{Log} c},\quad \tau = -\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{s\,f\,h^f}}{\operatorname{Log} c}$$

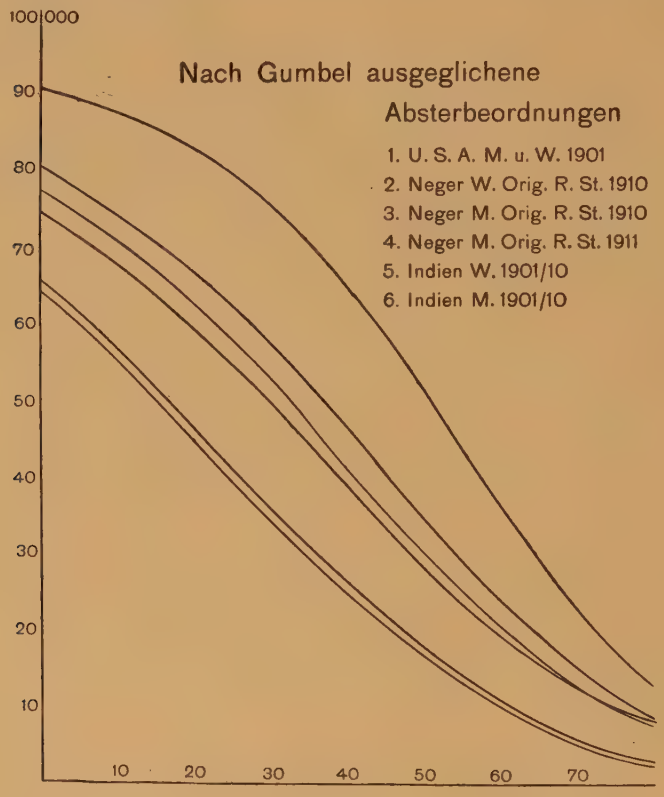
Setzen wir für $f = 1$ und $h = 1$, so erhalten wir die frühere Form von Makeham. Diese, auch für die Kindersterblichkeit gültigen Formeln unterscheiden sich von den ursprünglichen durch das Hinzutreten neuer Q-Funktionen. Dabei weist die Beziehung von Lazarus bei allen Q-Funktionen für ein bestimmtes x die gleiche Grenze λ auf, während die Argumente unter sich verschieden sind und mit den Konstanten der Absterbeordnung variieren. Das erweiterte Gumbelsche Gesetz hat Q-Funktionen mit dem festen Argument $^3/_2$ und voneinander verschiedenen Grenzen, die sich ändern mit dem Alter und den Konstanten der Absterbeordnung. Über die Anpassungsfähigkeit können wir das gleiche aussagen wie über die einfachen Gesetze: Die Lazarussche Formel ist schmiegsamer als das erweiterte Gumbelsche Gesetz.

3. Aufstellen einer neuen Absterbeordnung mit Hilfe der Interpolation einer schon berechneten Tafel.

Liegt eine bestimmte Gumbelsche Absterbeordnung vor, so sind die Zahlwerte x, u, l_x einander in einer Tabelle von folgender Form zugeordnet:

x	u	$l_x = e^{-\frac{u^2}{2}}$

Für eine neue Absterbeordnung (neues τ und H) erhalten wir die Werte von l_x durch Ausrechnen der Werte von u und entsprechendes Interpolieren unserer Tafel. Haben die beiden Absterbeordnungen das gleiche τ, so erfolgt die Altersverschiebung, auf die das Problem hinauskommt, immer in der gleichen Richtung. Haben sie das gleiche H, so bleibt der Wert $l_x = e^{-\frac{1}{2}}$ bei beiden Tafeln erhalten, und es erfolgt vor dem Alter $x = H$ die entgegengesetzte Altersverschiebung als nachher.



Figur 4.

Es stellt sich nun das Problem: Ist es möglich, noch weitere Versicherungswerte für eine neue Absterbeordnung möglichst einfach und genau zu berechnen, wenn sie für eine andere Absterbeordnung und den nämlichen Zinsfuss schon aufgestellt sind.

Will man die Versicherungswerte für eine neue Absterbeordnung aber den gleichen Zinsfuss bestimmen, so besteht die übliche Methode

darin, dass man das ganze System der Kommutationszahlen für die neue Absterbeordnung berechnet. Wenn es sich jedoch nur um die Kenntnis einzelner Werte handelt, so kann man sich einer Näherung nach folgender Überlegung bedienen.

Wir tragen uns zunächst die theoretischen Überlebensordnungen für verschiedene Bevölkerungen, Geschlechter und Zeiten in einer Tafel auf. (Die von Gumbel ausgerechneten Tabellen werden hier benützt, siehe Figur 4.) Allgemein können wir feststellen, dass die Kurven gegen die hohen Alter hin zusammenlaufen. Für die mittleren Alter weisen die verschiedenen Absterbeordnungen eine nahezu konstante Altersverschiebung auf. Das stimmt um so besser, je näher verwandt die beiden Absterbeordnungen sind, also insbesondere für Tafeln der gleichen Bevölkerung und der gleichen Zeit, aber verschiedenen Geschlechtes.

Wir bezeichnen das Alter der neuen Überlebensordnung mit z, das der alten mit x und schreiben:

$$D_z = l_z v^z$$

wo v den Abzinsfaktor, D_z die diskontierte Zahl der Lebenden bedeutet. Weiter bestimmen wir durch Interpolation der alten Tafel l_x so, dass $l_z = l_x$ ist, dann folgt:

$$D_z = D_x v^{z-x}$$

wo D_x ebenfalls durch Interpolieren erhalten wird.

Nun gilt:

$$N_z = \sum_z^w D_x v^{z-x}$$

und auch:

$$N_z = \sum_z^w D_z$$

Dabei wechselt x, wenn z wechselt. In Zukunft wollen wir die durch Interpolation bestimmten Werte mit einem * versehen.

Die ersten Werte von $\sum_z^w D_z$ haben den grössten Einfluss auf die Gestaltung von N_z. Wir wollen deshalb die ersten drei Werte

unverändert erhalten und erst die folgenden Werte durch Interpolation annähern. Wir wählen die Form:

$$N_z = D_z + D_{z+1} + N^*_{z+2}\, v^{z+2-x_1}$$

Dem Alter $z+2$ entspricht in der alten Absterbeordnung x_1, da dort gilt $l_{z+2} = l_{x_1}$. Ferner ist N^*_{z+2} der für das Alter x_1 aus der alten N_x-Tabelle interpolierte Wert. Die Grössen D_x und D_{z+1} werden am besten durch Multiplikation der l_z mit dem entsprechenden Abzinsfaktor errechnet. Durch unsere Näherungsannahme bleibt auch D_{z+2} erhalten.

Die Näherungsrechnung wirkt sich wie folgt aus: Die neue Absterbeordnung wird von einem gewissen Alter an durch die alte Absterbeordnung ersetzt, die um die Altersdifferenz parallel verschoben ist. Der Wert $N^*_{z+2}\, v^{z+2-x_1}$ ist genau das richtige N für diese parallelverschobene, alte Absterbeordnung. Der Fehler, den wir dadurch machen, wird durch zwei Komponenten verursacht:

a) Fehler, der durch die falsche Absterbeordnung direkt hervorgerufen wird.

b) Fehler, der durch den falschen Abzinsfaktor (falsche Altersdifferenz) bedingt ist. Die beiden Fehler subtrahieren sich, was wir aus den beiden graphischen Darstellungen ablesen können. Die Grössen, mit denen wir rechnen, versehen wir mit dem Index r, die theoretisch richtigen mit dem Index t. Die rechnerische Altersdifferenz Δ^r ist für alle z konstant.

Dann gilt für Figur 5:

$$l^r_z > l^t_z$$

$$\Delta^r > \Delta^t$$

Da aber $v < 1$, so folgt:

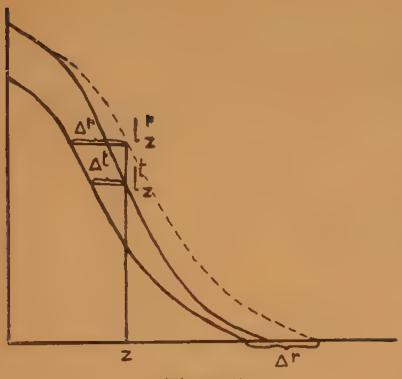
$$v^{\Delta r} < v^{\Delta t} \quad \text{für alle } z.$$

Für Figur 6 folgt analog:

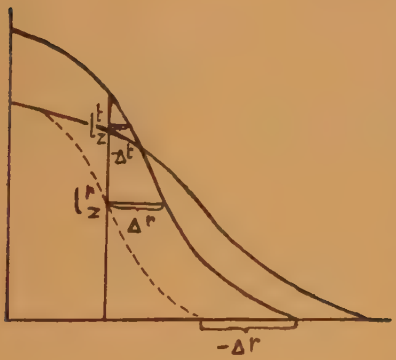
$$l^r_z < l^t_z$$

Wegen der negativen Verschiebung haben die Δ oft negative Vorzeichen, deshalb ist $-\Delta^r < -\Delta^t$ und es gilt:

$$v^{-\Delta r} > v^{-\Delta t} \quad \text{für alle } z.$$



Figur 5.



Figur 6.

Unsere Näherungsformel liefert um so genauere Werte, je paralleler die Absterbeordnungen zueinander verlaufen. Sind die Überlebensordnungen sehr verschieden, so kann man eine bessere Lösung erzielen durch die Erhaltung noch weiterer D_z, doch wird dadurch die Formel rechnerisch komplizierter. Wenn die Absterbeordnungen nahe verwandt sind, so lässt sich schon folgende Näherung rechtfertigen:

$$N_z = N_z^* \, v^{z-x}$$

In diesem Fall ergibt sich der Rentenbarwert durch eine einfache Altersverschiebung.

Unsere Näherungsformel scheint willkürlich gewählt zu sein; betrachten wir jedoch das Passen der theoretischen Überlebensordnung mit der empirischen, so erhalten wir die Überzeugung, dass die Fehler durch unsere Näherung im allgemeinen kleiner sein werden als die Fehler, die durch die eigentliche Ausgleichung entstehen. Auf die Stützung dieser Behauptung mit Zahlenbeispielen wurde der grossen Rechenarbeit wegen verzichtet.

Mit Hilfe dieser Werte für D_z und N_z können wir alle möglichen Versicherungsgrössen ausrechnen, da ja die Beziehungen gültig sind:

$$C_z = v\, D_z - D_{z+1} \qquad M_z = D_z - d\, N_z$$

worin d der Diskont ist.

4. Leibrentenproblem in kontinuierlicher und diskontinuierlicher Betrachtung.

a) Rentenbarwert in kontinuierlicher Betrachtung.

Allgemein gilt:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x l_x} \int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t}\, dt$$

Setzen wir:

$$l_x = e^{-\frac{u^2}{2}} \qquad x + t = z \qquad l_z = e^{-\frac{u_1^2}{2}}$$

$$u_1 = \frac{1}{2\tau}\left(z - H + \sqrt{(z-H)^2 + 4\tau^2}\right) \quad \text{so ist: } z = \tau u_1 - \frac{\tau}{u_1} + H$$

und damit wird:

$$\bar{a}_x = \tau\, e^{\frac{u^2}{2}}\, v^{H-x} \int_u^\infty e^{\tau \operatorname{Log} v \left[u_1 - \frac{1}{u_1}\right]} e^{-\frac{u_1^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{u_1^2}\right) du_1$$

Die Funktion $e^{\tau \operatorname{Log} v \left[u_1 - \frac{1}{u_1}\right]}$ kann in eine Reihe von steigenden und fallenden Potenzen von u_1 entwickelt werden. Die Koeffizienten sind Besselfunktionen 1. Art.

Somit gilt:

$$e^{\tau \operatorname{Log} v \left[u_1 - \frac{1}{u_1}\right]} = \sum_{-\infty}^{\infty n} u_1^n J^n (2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

wobei $J^n (2\,\tau \operatorname{Log} v) = \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{(\tau \operatorname{Log} v)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$ ist.

Die Reihen für die Besselkoeffizienten sind für jeden Wert des Arguments gleichmässig konvergent. Wir führen nun unsere Entwicklung in das Integral ein und erhalten für dieses:

$$\int_u^\infty \sum_{-\infty}^{\infty} u_1^n\, e^{-\frac{u_1^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{u_1^2}\right) J^n (2\,\tau \operatorname{Log} v)\, du_1$$

Unsere Reihe ist der gültigen Laurententwicklung wegen gleichmässig konvergent, also dürfen wir Summe- und Integralzeichen vertauschen und die Reihe nachher beliebig umordnen.

Es ergibt sich:

$$\sum_{-\infty}^{\infty n} \left[\int_u^{\infty} e^{-\frac{u_1^2}{2}} u_1^n \, du_1 + \int_u^{\infty} e^{-\frac{u_1^2}{2}} u_1^{n-2} \, du_1 \right] J^n (2 \tau \operatorname{Log} v)$$

Ersetzen wir die Integrale noch durch Q-Funktionen, so folgt:

$$\bar{a}_x = \tau \, v^{H-x} \, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty n} \left[2^{\frac{n}{2}} Q_u \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + 2^{\frac{n}{2}-1} Q_u \left(\frac{n}{2} \right) \right] J^n (2 \tau \operatorname{Log} v) \quad (1)$$

Während die kontinuierliche Leibrente beim Makehamschen Gesetz durch eine unvollständige Gammafunktion dargestellt werden kann, ist beim Gumbelschen Gesetz eine unendliche Reihe von Produkten von Bessel- und Q-Funktionen notwendig.

Zunächst betrachten wir den Spezialfall $i = 0$ oder $v = 1$.

Es wird: $\log v \Big|_{v=1} = 0$ und wir erhalten:

$$J^0 (0) = 1 \qquad J^n (0) \Big|_{n \neq 0} = 0$$

Damit wird:

$$a_x \Big|_{v=1} = \tau \, e^{\frac{u^2}{2}} \left[Q_u (1) + \frac{1}{2} Q_u (0) \right]$$

Dies bedeutet nach der allgemeinen Relation:

$$a_x \Big|_{v=1} = \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} l_{x+t} \, dt = \mathring{e}_x = \tau \, e^{\frac{u^2}{2}} \left[Q_u (1) + \frac{1}{2} Q_u (0) \right]$$

Wir haben also auch $\mathring{e}_x$ in Q-Funktionen ausgedrückt. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathring{e}_x$ mit dem früher berechneten Ausdruck übereinstimmt. Dazu müssen wir beweisen, dass für die Summenfunktion die Beziehung gilt:

$$B (x) = \tau \left[Q_u (1) + \frac{1}{2} Q_u (0) \right]$$

denn $\mathring{e}_x = \frac{B(x)}{l_x}$ ist immer erfüllt. Durch Einsetzen der Integrale an Stelle der Q-Funktionen erhalten wir:

$$\tau \int_{-u}^{\infty} e^{-\frac{u_1^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{u_1^2}\right) du_1$$

das Integral, das früher zur Berechnung der Summenfunktion verwendet wurde.

Wenden wir die folgenden Umrechnungsformeln der Gammafunktion auf unseren Ausdruck (1) für die Leibrente an:

$$Q_u\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2} Q_u\left(\frac{n}{2}\right) + e^{-u} u^{\frac{n}{2}}$$

$$Q_u\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - P_u\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{wo} \quad P_u\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^u e^{-y} y^{\frac{n}{2}-1} dy \text{ ist,}$$

so ergeben sich die beiden Beziehungen:

$$a_x = \tau v^{H-x} e^{\frac{u^2}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n 2^{\frac{n}{2}} \left[\frac{n+1}{2} Q_u\left(\frac{n}{2}\right) + e^{-u} u^{\frac{n}{2}}\right] J^n (2\tau \operatorname{Log} v)$$

$$\bar{a}_x = \tau v^{H-x} e^{\frac{u^2}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n 2^{\frac{n}{2}} \left[\frac{n+1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - P_u\left(\frac{n}{2}\right)\right) + e^{-u} u^{\frac{n}{2}}\right] J^n (2\tau \operatorname{Log} v)$$

Diese Ausdrücke sind rechnerisch komplizierter als (1), und wir suchen deshalb diesen für die Ausrechnung zu vereinfachen. Wir zerlegen die Summe von $n = -\infty \to \infty$ in die beiden Teilsummen von $n = 0 \to \infty$ und von $n = -1 \to -\infty$. Dabei berücksichtigen wir die aus der Theorie der Besselfunktionen bekannte Beziehung:

$$J^{-n} (2\tau \operatorname{Log} v) = (-1)^n J^n (2\tau \operatorname{Log} v)$$

und erhalten:

$$a_x = \tau v^{H-x} e^{\frac{u^2}{2}} \left\{\left[Q_u(1) + \frac{1}{2} Q_u(0)\right] J^0 (2\tau \operatorname{Log} v) +\right.$$

$$+\sum_{1}^{\infty n}\left[2^{\frac{n}{2}}\left(Q_u\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\,Q_u\left(\frac{n}{2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.-(-1)^n 2^{-\frac{n}{2}}\left(Q_u\left(-\frac{n}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\,Q_u\left(-\frac{n}{2}\right)\right)\right] J^n(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v)\Bigg\}$$

Wir schreiben den geschweiften Klammerausdruck etwas aus und fassen nach Q-Funktionen zusammen. Unter Zuhilfenahme der Reduktionsformel der Besselfunktion:

$$J^{r+1}(z)+J^{r-1}(z)=\frac{2\,r}{z}\,J^r(z)$$

ergibt sich eine zweite Darstellung der kontinuierlichen Leibrente, nämlich:

$$\bar{a}_x=\frac{1}{\mathrm{Log}\,v}\,v^{H-x}\,e^{\frac{u^2}{2}}\left\{\sum_{0}^{\infty n}(2n+1)\left[2^n Q_u(n+1)+2^{-(n+1)}Q_u(-n)\right]J^{2n+1}(2\tau\,\mathrm{Log}\,v)+\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{\infty n}2n\left[2^{\frac{2n-1}{2}}Q_u\left(\frac{2n+1}{2}\right)-2^{\frac{2n+1}{2}}Q_u\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\right]J^{2n}(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v)\right\}\quad[2]$$

Diese Formel ist konzentrierter als die erste, da wir Besselkoeffizienten zusammengefasst haben. Für die numerische Ausrechnung der kontinuierlichen Rentenbarwerte müssen wir bei ihrer Verwendung, neben der Absterbeordnung, noch folgende Tafeln besitzen (siehe folgende Seite).

Weiter müssen wir noch eine Tafel für die Produkte der entsprechenden Werte dieser beiden Tabellen aufstellen. Die Grössen der ersten Tafel sind vom Zinsfuss unabhängig. Wählen wir eine andere Absterbeordnung, so ändert nur das u; das entspricht einer Altersverschiebung; unsere betrachteten Werte erhalten wir durch Interpolation dieser Tabelle. Die Besselkoeffizienten ändern sowohl bei der Wahl einer anderen Absterbeordnung als auch eines anderen Zinsfusses; durch Interpolation erhält man weitere Resultate. Der Faktor $v^{H-x}\,\dfrac{1}{\mathrm{Log}\,v}$ wird am besten direkt bestimmt. Wir sehen also, dass unsere Berechnung ein kompliziertes und sehr umfangreiches

	$(2n+1)\, e^{\frac{u^2}{2}} \left[2^n Q_u(n+1) + 2^{-(n+1)} Q_u(-n)\right]$						$2n\, e^{\frac{u^2}{2}} \left[2^{\frac{2n-1}{2}}\, u\left(\frac{2n+1}{2}\right) - 2^{\frac{2n+1}{2}} Q_u\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\right]$					
x \ n / u	.....	-2	-1	0	1	2	.....	.....	-2	-1	0	1	2	.....

	$J^n(2\tau \operatorname{Log} v)$			
$2\tau \operatorname{Log} v$ \ n	0	1	2	.....

Tabellenmaterial erfordert. Für die praktische Anwendung müssen wir eine weitere Vereinfachung suchen.

Gehen wir auf die erste Darstellung [1] der kontinuierlichen Leibrente zurück, so sehen wir: zu ihrer Berechnung müssen wir eine ganze Anzahl von Q-Funktionen bestimmen. Dabei durchlaufen die Grenzen u theoretisch die Werte von $0 \to \infty$, praktisch etwa von $0 \to 5$, da bei $u = 5$ das zugehörige $l_x = 0$ wird. Wir brauchen zur Ausrechnung eine Tabelle der Q-Funktionen für die halben und ganzen Argumente. Diese muss so beschaffen sein, dass die Tafel für sehr kleine Intervalle der Grenze u zwischen $0 \to 5$ fortschreitet.

Die von Thalmann (14) berechnete Tabelle ist nicht anwendbar, was wir sofort zeigen können. Thalmann tabuliert die Funktion:

$$\varphi(\xi\,\vartheta) = \xi^{\vartheta}\, e^{\xi}\, Q_{\xi}(-\vartheta)$$

Diese Tafel ist darauf zugeschnitten, die kontinuierlichen Leibrentenbarwerte beim Makehamschen Gesetz auszurechnen. Das Argument ϑ geht von $0 \to 0{,}975$ und ξ würde wenigstens am Anfang mit genügend kleinen Abständen fortschreiten. Aber wir sehen sofort, dass wir für jedes u höchstens zwei Werte der gesuchten Funktion durch Umrechnung aus der Tabelle erhalten können, nämlich $Q_u(0)$ und $Q_u\left(-\frac{1}{2}\right)$, alle anderen müssen wir mit Hilfe von Reduktionsbeziehungen berechnen. Dabei geht die Tafel nur bis zur Grenze 3 und nicht bis 5. Wir wollen für unsere Berechnung zeigen, wie man in Anlehnung an Thalmann ebenfalls eine Form erhalten kann, die mit möglichst wenig Ausrechnung zum Ziele führt: Aus früherem geht hervor:

$$a_x = \tau\, v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \left\{ \sum_{0}^{\infty}{}_n\, 2^{\frac{n}{2}} \left[Q_u\left(\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2} Q_u\left(\frac{n}{2}\right) \right] J^n(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v) + \right.$$

$$\left. + \sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^n\, 2^{-\frac{n}{2}} \left[Q_u\left(-\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2} Q_u\left(-\frac{n}{2}\right) \right] J^n(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v) \right\}$$

In der zweiten Summe haben die Q-Funktionen immer negative Argumente, mit Ausnahme des ersten Gliedes. Mit wachsendem n nehmen sowohl die Besselkoeffizienten wie die Faktoren $2^{-\frac{n}{2}}$ und die Ausdrücke

$$\left[Q_u\left(-\frac{n}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\,Q_u\left(-\frac{n}{2}\right)\right]$$

ab. Die Reihe konvergiert also sehr schnell gegen Null; wir lassen sie in dieser Formulierung und benützen zur numerischen Ausrechnung die bekannten Reduktionsbeziehungen:

$$Q_x(z+1) = z\,Q_x(z) + e^{-x}\,x^z$$

$$Q_x(z+1) - (x+z)\,Q_x(z) + x\,(z-1)\,Q_x(z-1) = 0$$

Die erste Reihe wird mit folgender Überlegung geändert:

$$Q_u\left(\frac{n}{2}\right) = \int_u^\infty e^{-y}\,y^{\frac{n}{2}-1}\,dy$$

Dieses Integral lässt sich darstellen als:

$$Q_u\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y}\,y^{\frac{n}{2}-1}\,dy - \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1}\,dy + \int_u^\infty y^{\frac{n}{2}-1}\,dy -$$

$$-\int_0^u (e^{-y}-1)\,y^{\frac{n}{2}-1}\,dy$$

Hier stellt das erste Integral die vollständige Gammafunktion dar; die beiden mittleren fassen wir zusammen und integrieren nachher; im letzten Integral entwickeln wir $e^{-y}-1$ und lösen dann gliedweise auf. Es folgt:

$$Q_u\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{u^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}} + \frac{u^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} - + \cdots + \frac{(-1)^{r+1}\,u^{\frac{n}{2}+r}}{r!\left(\frac{n}{2}+r\right)}$$

Ersetzt man $\frac{n}{2}$ durch $\frac{n}{2}+1$, so erhält man für $Q_u\left(\frac{n}{2}+1\right)$ eine ähnliche Entwicklung, und durch Zusammenfassen ergibt sich:

$$Q_u\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2}\,Q_u\left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(1+\frac{n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + F(u,n)$$

wo $F(u,n) = \sum_{0}^{\infty}{}_{r} \frac{(-1)^r (r-2)\, u^{\frac{n}{2}+r}}{2\left(\frac{n}{2}+r\right) r!}$ ist.

Diese alternierende Reihe ist konvergent, der Fehler ist kleiner als das erste vernachlässigte Glied. Die Entwicklung ist nicht anwendbar für die Reihe, wo die Q-Funktionen negative Argumente haben, da unbestimmte Symbole auftreten. Wir erhalten als Schlussformel:

$$a_x = \tau\, v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \left\{ \sum_{0}^{\infty}{}_{n} 2^{\frac{n}{2}} \left[\left(1 + \frac{n}{4}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + F(u,n) \right] J^n(2\tau \operatorname{Log} v) + \right. \qquad [3]$$

$$\left. + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^n\, 2^{-\frac{n}{2}} \left[Q_u\left(-\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\, Q_u\left(-\frac{n}{2}\right) \right] J^n(2\tau \operatorname{Log} v) \right\}$$

Trotzdem diese Formel für die numerische Auswertung eine ungeheure Rechnerei bedeutet, würde sie von allen den von uns betrachteten Methoden in der Praxis am bequemsten zum Ziele führen.

b) Rentenbarwert in diskontinuierlicher Betrachtung.

Üblicherweise wird dieses Problem durch das Aufstellen der Kommutationszahlen gelöst. Es wird:

$$D_x = v^x\, l_x \qquad N_x = \sum_{x}^{w} D_z$$

$$\mathsf{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Bei unserem Gumbelschen Gesetz ergibt sich, in Anlehnung an die kontinuierliche, sofort auch eine andere Darstellung der diskontinuierlichen Leibrente. Es ist:

$$\mathsf{a}_x = \frac{1}{v^x\, l_x} \sum_{x}^{w} v^z\, l_z$$

Substituieren wir:

$$l_x = e^{-\frac{u^2}{2}} \qquad l_z = e^{-\frac{u_1^2}{2}}$$

$$u_1 = \frac{1}{2\,\tau}\left(z - H + \sqrt{(z-H)^2 + 4\,\tau^2}\right) = f(z)$$

$$z = \tau\, u_1 - \frac{\tau}{u_1} + H$$

so folgt:

$$\mathsf{a}_x = e^{\frac{u^2}{2}}\, v^{H-x} \sum_x^w e^{\tau \operatorname{Log} v \left[u_1 - \frac{1}{u_1}\right]}\, e^{-\frac{u_1^2}{2}}$$

Entwickeln wir $e^{\tau \operatorname{Log} v \left[u_1 - \frac{1}{u_1}\right]}$ wie früher und setzen noch:

$$\sum_x^w e^{-\frac{u_1^2}{2}} = \sum_x^w l_x = B_x^{(0)} \quad \sum_x^w \left(u_1^n + (-1)^n\, u_1^{-n}\right) e^{-\frac{u_1^2}{2}} = B_x^{(n)} \text{ für } n \geqq 1$$

so erhalten wir das Schlussresultat:

$$\mathsf{a}_x = v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty{}_n\, B_x^{(n)}\, J^n\,(2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

Analog bekommen wir für die nachschüssigen Leibrentenbarwerte die Form:

$$a_x = v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty{}_n\, B_{x+1}^{(n)}\, J^n\,(2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

Das Argument der Besselkoeffizienten ist wie früher: $2\,\tau \operatorname{Log} v$.

Damit haben wir unsere diskontinuierliche Leibrente, in Analogie zur kontinuierlichen, mit Hilfe von Besselfunktionen ausgedrückt. Berechnen wir für unser Gumbelsches Gesetz an Stelle der Kommutationszahlen die neuen Summen $B_x^{(n)}$, so wie die Besselkoeffizienten $J^{(n)}\,(2\,\tau \operatorname{Log} v)$, so können wir mittels unserer Formel die Leibrentenbarwerte berechnen. Diese Beziehungen wurden hier hergeleitet, da sie im Abschnitt über das Zinsfussproblem von Wichtigkeit sind. Weiter stellen wir fest, dass die Besselfunktionen mit dem Zinsfuss in die Rechnung hineinkommen. Beim Übergang von der diskontinuierlichen zur kontinuierlichen Methode treten, wie beim Makehamschen Gesetz, noch Q-Funktionen auf.

5. Weitere Versicherungswerte in kontinuierlicher und diskontinuierlicher Betrachtung.

Unsern früheren Entwicklungen entsprechend setzen wir:

$$N_x = v^H \sum_0^\infty B_x^{(n)} J^n (2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

Für M_x leiten wir eine analoge Beziehung her:

$$M_x = \sum_x^w v^{x+1}\, d_x = v^H \sum_x^w e^{\tau \operatorname{Log} v \left[u_2 - \frac{1}{u_2}\right]} d_x \quad \text{wo } d_x = l_x - l_{x+1} \text{ ist.}$$

dabei entspricht u_2 dem Alter $x+1$. Setzen wir noch:

$$G_x^{(0)} = \sum_x^w d_x \quad \text{und für } n \gtreqless 1 \quad G_x^{(n)} = \sum_x^w (u_2^n + (-1)^n u_2^{-n})\, d_x$$

so erhalten wir:

$$M_x = v^H \sum_0^\infty G_x^{(n)} J^n (2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

Weiter schreiben wir: $D_x = v^x l_x = v^x e^{-\frac{u^2}{2}}$. Dem Alter x entspricht immer die Grösse u. Wir definieren noch $F_x^{(0)}$ und $F_x^{(n)}$:

$$F_x^{(0)} = Q_u(1) + \frac{1}{2} Q_u(0)$$

$$\text{und für } n \gtreqless 1 \quad F_x^{(n)} = \left\{ 2^{\frac{n}{2}} \left[Q_u\left(\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2} Q_u\left(\frac{n}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} \left[Q_u\left(-\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2} Q_u\left(-\frac{n}{2}\right)\right]\right\}$$

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich für die aufgeschobene Leibrente:

$$_{m|}a_x = v^{H-x} e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty B_{x+m}^{(n)} J^n (2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

$$ {}_{m|}\bar{a}_x = \tau\, v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty F^{(n)}_{x+m}\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v) $$

und für die temporäre erhält man die Beziehung:

$$ {}_{|m}\mathsf{a}_x = v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty (B^{(n)}_x - B^{(n)}_{x+m})\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v) $$

$$ {}_{|m}\bar{a}_x = \tau\, v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty (F^{(n)}_x - F^{(n)}_{x+m})\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v) $$

Die Einmaleinlage der reinen Todesfallversicherung wird:

$$ A_x = v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty G^{(n)}_x\, J^{(n)}\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v) $$

$$ \bar{A}_x = 1 - \delta\,\bar{a}_x = 1 - \delta\,\tau\, v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty F^{(n)}_x\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v) $$

und für die Jahresprämie der Altersrente folgt

$$ P\,({}_{m|}\mathsf{a}_x) = \frac{{}_{m|}\mathsf{a}_x}{{}_{|m}\mathsf{a}_x} = \frac{\sum_0^\infty{}^n B^{(n)}_{x+m}\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v)}{\sum_0^\infty{}^n (B^{(n)}_x - B^{(n)}_{x+m})\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v)} $$

$$ P\,({}_{m|}\bar{a}_x) = \frac{\sum_0^\infty{}^n F^{(n)}_{x+m}\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v)}{\sum_0^\infty{}^n (F^{(n)}_x - F^{(n)}_{x+m})\, J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v)} $$

Schliesslich wird das Deckungskapital der gemischten Versicherung:

$$ {}_tV_{x\overline{m}|} = 1 - \frac{a_{x+t:\overline{m-t}|}}{a_{x\overline{m}|}} = 1 - \frac{v^{H-x-t}\, e^{\frac{u_1^2}{2}} \sum_0^\infty{}^n (B^{(n)}_{x+t} - B^n_{x+m})\, J^n(2\tau \operatorname{Log} v)}{v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty{}^n (B^{(n)}_x - B^{(n)}_{x+m})\, J^n(2\tau \operatorname{Log} v)} $$

$$ {}_t\overline{V}_{x\overline{m}|} = 1 - \frac{v^{H-x-t}\, e^{\frac{u_1^2}{2}} \sum_0^\infty{}^n (F^{(n)}_{x+t} - F^{(n)}_{x+m})\, J^n(2\tau \operatorname{Log} v)}{v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_0^\infty{}^n (F^{(n)}_x - F^{(n)}_{x+m})\, J^n(2\tau \operatorname{Log} v)} $$

Im Vorhergehenden wurde immer sowohl der diskontinuierliche wie der kontinuierliche Ausdruck des Versicherungswertes dargestellt. Sie werden nach den üblichen Formeln der Versicherungsmathematik berechnet, und wo es notwendig erschien, sind auch die allgemeinen Beziehungen angegeben worden.

Aus den wenigen Betrachtungen sehen wir, dass in unseren Entwicklungen für sämtliche Versicherungswerte, in kontinuierlicher oder diskontinuierlicher Betrachtung, unendliche Reihen auftreten. Die Koeffizienten der Reihe sind Besselfunktionen erster Art. Durch den Übergang von der diskontinuierlichen zur kontinuierlichen Methode treten Q-Funktionen in die Rechnung ein, sie sind in den Funktionen $F^{(n)}_x$ enthalten.

6. Das Problem der Verbindungsrente (Gesetz des gleichmässigen Alterns).

Es ist bewiesen, dass nur das Makehamsche Gesetz und das Gausssche Fehlergesetz die Ersetzung ungleicher Alter durch gleiche zulassen (15), (16), (17). Die Auflösung dieser Funktionalbeziehung müsste falsch sein, wenn auch das Gumbelsche Gesetz diese Eigenschaft besitzen würde. Dass diese Absterbefunktion das Gesetz des gleichmässigen Alterns nicht erfüllt, können wir mit Hilfe folgender einfacher Überlegung direkt zeigen. Es ist bekanntlich:

$$ l_x = e^{-\frac{1}{2\tau^2}(x + \mathring{e}_x - H)^2} $$

und setzen wir:

$$g = e^{-\frac{1}{z^2}} \qquad s = e^{\frac{H}{z^2}} \qquad k = e^{-\frac{H^2}{2z^2}},$$

so folgt:

$$l_x = k\, s^{x+\mathring{e}_x}\, g^{\frac{(x+\mathring{e}_x)^2}{2}}$$

Dieser Ausdruck stellt nicht das Gausssche Fehlergesetz für x dar; denn als Fehler tritt $x + \mathring{e}_x$ auf, also eine Funktion von x. Setzen wir statt x gleich $x + t$ und statt z gleich $z + t$ in den Ausdrücken für l_x und l_z, so erhalten wir:

$$l_{x+t} = k\, s^{x+t+\mathring{e}_{x+t}}\, g^{\frac{(x+t+\mathring{e}_{x+t})^2}{2}}$$

$$l_{z+t} = k\, s^{z+t+\mathring{e}_{z+t}}\, g^{\frac{(z+t+\mathring{e}_{z+t})^2}{2}}$$

Dabei sind $\mathring{e}_{x+t}$ und $\mathring{e}_{z+t}$ voneinander verschieden, und damit unterscheiden sich die Zusätze von x und z bei dem Exponenten der Konstanten s, das heisst: das zu berechnende Durchschnittsalter ist von t nicht unabhängig. Das Gesetz des gleichmässigen Alterns ist nicht erfüllt.

Für die Berechnung der Verbindungsrente in kontinuierlicher Betrachtung ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach t Jahren die Personenverbindung noch besteht, wichtig. Für die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer Person gilt:

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau}\, d\tau}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach t Jahren die Personenverbindung $(x, y \ldots)$ noch existiert, ist gegeben durch:

$$p\,(t) = {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot \ldots$$

und kombinieren wir die beiden Resultate, so bekommen wir:

$$p\,(t) = e^{-\int_0^t \sum\limits_{s=x,\,y\ldots} \mu_{s+\tau}\, d\tau}$$

Da das Gesetz des gleichmässigen Alterns nicht erfüllt ist, können wir die verschiedenen $\mu_{s+\tau}$ nicht durch ein Durchschnitts-μ ersetzen,

das von τ unabhängig ist. Beim Makehamschen Gesetz ist diese Ersetzung möglich, und damit ist auch das Problem der Verbindungsrente in einfacher Weise lösbar. Im Falle des Gumbelschen Gesetzes kann die allgemeine Integraldarstellung für die Verbindungsrente:

$$\bar{a}_{x,y,z\ldots.} = \int_0^\infty v^t \, p\,(t)\, dt$$

nicht wesentlich vereinfacht werden; insbesondere ist die Auflösung des Integrals meist nicht möglich.

Einzig im Spezialfall, wo alle Mitglieder der Personenverbindung das gleiche Alter z haben und der nämlichen Absterbeordnung gehorchen, lässt sich eine Lösung geben. Es gilt dann:

$$\bar{a}^{(r)}_{z,z\ldots} = \frac{1}{v^z \, l_z \cdot l_z \ldots} \int_z^\infty v^x \, l_x \, l_x \ldots . \, dx$$

Der früheren Entwicklung für eine Person entsprechend folgt:

$$\bar{a}^{(r)}_{z,z\ldots} = \tau \left(e^{\frac{u^2}{2}}\right)^r v^{H-z} \int_u^\infty e^{\tau \operatorname{Log} v \left[u_1 - \frac{1}{u_1}\right]} \left(e^{-\frac{u_1^2}{2}}\right)^r \left(1 + \frac{1}{u_1^2}\right) du_1$$

Setzen wir die unvollständige Gammafunktionen ein, so erhalten wir

$$\bar{a}^{(r)}_{z,z\ldots} = \tau \, v^{H-x} \, e^{r \frac{u_1^2}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} {}_n \left[\left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{n}{2}} Q_u \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{n}{2}-1} Q_u \left(\frac{n}{2}\right) \right] J^n (2 \tau \operatorname{Log} v)$$

Die Personenzahl r tritt als Exponent bei e und in den Faktoren vor den Q-Funktionen auf.

Mathematisch genau können wir das Problem der Verbindungsrente in diskontinuierlicher Betrachtung nur durch das Aufstellen des ganzen Systems der Kommutationszahlen lösen. Da das ein riesiges Tabellenmaterial gibt, ist ganz klar, dass hier die Gumbelsche Absterbefunktion einen grundlegenden Nachteil gegenüber dem Makehamschen Gesetz aufweist.

7. Das Zinsfussproblem.

Wir untersuchen die Aufgabe, aus den Versicherungswerten einer bestimmten Gumbelschen Absterbeordnung und eines bestimmten Zinsfusses möglichst genau und einfach die Versicherungswerte für einen neuen Zinsfuss, aber die gleiche Absterbeordnung herzuleiten (ohne das ganze System der Kommutationszahlen aufzustellen).

Die zweite Darstellung der diskontinuierlichen Leibrente liefert uns sofort eine komplizierte Lösung des Zinsfussproblems. Wir hatten dort:

$$N_x = v^H \sum_0^\infty B_x^{(n)} J^n(2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

Ebenfalls wurde hergeleitet, dass gilt:

$$M_x = v^H \sum_0^\infty G_x^{(n)} J^n(2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

Der Vollständigkeit halber zeigen wir auch eine Reihenentwicklung für D_x und C_x. Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$b_x^{(0)} = l_x \text{ und für } n \geqq 1 \qquad b_x^{(n)} = (u_1^n + (-1)^n u_1^{-n})\, l_x$$

$$g_x^{(0)} = d_x \text{ und für } n \geqq 1 \qquad g_x^{(n)} = (u_2^n + (-1)^n u_2^{-n})\, d_x$$

so ergibt sich:

$$D_x = v^H \sum_0^\infty b_x^{(n)} J^n(2\,\tau \operatorname{Log} v) \qquad C_x = v^H \sum_0^\infty g_x^{(n)} J^n(2\,\tau \operatorname{Log} v)$$

Da die Ausdrücke $B_x^{(n)}$ und $G_x^{(n)}$ vom Zinsfuss unabhängig sind, steckt dieser in der Summe nur in den Besselkoeffizienten. Die Reihe des Produktes $B_x^{(n)} J^n(2\,\tau \operatorname{Log} v)$ oder $G_x^{(n)} J^n(2\,\tau \operatorname{Log} v)$ konvergiert mit wachsendem n wegen der gültigen Laurententwicklung. Dabei liegt der ungünstige Fall vor, wo $J^n(2\,\tau \operatorname{Log} v)$ abnimmt, während die Summen $B_x^{(n)}$ oder $G_x^{(n)}$ grösser werden. Wir müssen damit sehr viele Glieder unserer Reihe berücksichtigen, um ein genaues Resultat zu erhalten. Gehen wir von einem Zinsfuss zu einem andern über, so bleiben die Ausdrücke $B_x^{(n)}$ und $G_x^{(n)}$ konstant. Die Besselkoeffizienten müssen für die Parameter 0 und 1 neu berechnet werden.

Für die übrigen Parameter könnte man sie mit Hilfe der Reduktionsbeziehung:

$$J^{r+1}_{(z)} + J^{r-1}_{(z)} = \frac{2\,r}{z} J^{r}_{(z)}$$

bestimmen. Diese Lösung ist theoretisch richtig, für die numerische Berechnung kann sie allerdings nicht verwendet werden. Die Gründe sind leicht einzusehen. Der Fehler, der durch die Vernachlässigung der höheren Stellen entsteht, vergrössert sich unter Anwendung der Reduktionsbeziehung, da er multipliziert wird. Das ganze Resultat wird also sehr ungenau. Das bedeutet, dass die Besselkoeffizienten direkt bestimmt werden müssen. Die obige Beziehung ist eine blosse Kontrollformel.

Falls die Summen $B^{(n)}_x$ und $G^{(n)}_x$ bekannt sind, kann man die Kommutationszahlen N_x und M_x zu einem neuen Zinsfuss durch diese Methode berechnen. Damit ist es auch möglich, die verschiedensten Versicherungswerte für einen neuen Zinsfuss zu bestimmen. Bei der kontinuierlichen Methode führt die analoge Überlegung ebenfalls zum Ziele.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Entwicklungen der Kommutationszahlen in Besselfunktionen auch bei anderen Absterbegesetzen, insbesondere beim Makehamschen, existieren. Es ist:

$$D_x = v^x\, l_x = e^{x \operatorname{Log} v}\, l_x$$

Substituieren wir an Stelle von x die Funktion:

$$x = \bar{u} - \frac{1}{\bar{u}}$$

und betrachten $\bar{u}$ immer positiv, so erhalten wir:

$$u = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$$

Es ist eine ganz ähnliche Relation, wie sie beim Gumbelschen Gesetz gültig ist. Führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$\bar{b}^{(0)}_x = l_x \quad \text{und für} \quad n \geqq 1 \qquad b^{(n)}_x = \left(u^n + (-1)^n\, \bar{u}^{-n}\right) l_x$$

$$\bar{B}^{(0)}_x = \sum_x^w l_x \quad \text{und für} \quad n \geqq 1 \qquad \bar{B}^{(n)}_x = \sum_x^w \left(u^n + (-1)^n\, \bar{u}^{-n}\right) l_x$$

so ergibt sich für die Kommutationszahlen die Beziehung:

$$D_x = \sum_0^\infty \bar{b}_x^{(n)} J^n(2 \operatorname{Log} v) \qquad N_x = \sum_0^\infty \bar{B}_x^{(n)} J^n(2 \operatorname{Log} v)$$

Auf analoge Weise würde man erhalten:

$$C_x = \sum_0^\infty \bar{G}_x^{(n)} J^n(2 \operatorname{Log} v) \qquad M_x = \sum_0^\infty \bar{G}_x^{(n)} J^n(2 \operatorname{Log} v)$$

Durch unsere Substitution ist es möglich, *die Kommutationszahlen irgendeines Absterbegesetzes mit Hilfe von Besselfunktionen darzustellen.* Das Zinsfussproblem ist also auch hier nach unserer früheren Methode lösbar, falls die Summen $\bar{B}_x^{(n)}$ und $\bar{G}_x^{(n)}$ berechnet sind. Dabei ist das Argument der Besselkoeffizienten nur noch 2 Log v, also viel kleiner als beim Gumbelschen Gesetz, wo gilt 2τ Log v. Damit werden die ersteren Besselfunktionen viel rascher verschwindend klein. Beim Gumbelschen Gesetz wäre es sofort möglich, auch diese allgemein gültige Form der Entwicklung von Kommutationszahlen mit Hilfe der Substitution $\bar{u} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$ zu verwenden. Doch würde das keine Rechnungserleichterung bringen, da die u trotzdem zur Aufstellung der l_x notwendig sind. Die Besselkoeffizienten müssten in diesem Fall für die kontinuierliche und diskontinuierliche Methode getrennt berechnet werden.

Da die $\bar{u}$ in den praktischen Beispielen viel grösser werden als die u, gilt für die Summen:

$$\bar{B}_x^{(n)} \geqq B_x^n \qquad G_x^{(n)} \geqq G_x^{(n)}$$

Um bei beiden Methoden die gleiche Genauigkeit zu erreichen, müssen wir wohl ungefähr gleich viele Glieder der entsprechenden Reihen berücksichtigen.

Soll das Zinsfussproblem praktisch mit dieser Methode gelöst werden, so muss die Reihe nach wenigen Entwicklungsgliedern schon eine gute Annäherung an den theoretisch richtigen Wert geben. Deshalb untersuchen wir die Grössenordnungen der Summen $B_x^{(n)}$ und $G_x^{(n)}$ und bestimmen die Besselkoeffizienten für einen festen Zinsfuss.

Zur Ermittlung der Grössenordnung der Summen $\bar{B}_x^{(n)}$ bedienen wir uns folgender Überlegung. Wir setzen für $\bar{u} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+4})$ näherungsweise $u = x$; dadurch wird die Summe zu klein. Weiter betrachten wir den Fall, wo die Absterbeordnung eine Gerade ist, und zwar:

$$l_x = -\frac{1}{100}x + 1$$

also: $l_0 = 1$ und: $w = 100$

Wir sollen berechnen:

$$\sum_x^{100} (x^n + (-1)^n x^{-n}) \left(-\frac{1}{100}x + 1\right)$$

In ganz roher Annäherung dürfen wir dafür setzen:

$$\int_x^{100} (x^n + (-1)^n x^{-n}) \left(-\frac{1}{100}x + 1\right) dx$$

Dieser Wert ist gegenüber der Summe wieder zu klein. Wir untersuchen nun den Fall $n = 4$ und setzen für die untere Grenze nacheinander $x = 0$ und $x = 20$. Für das Integral erhalten wir die Resultate:

$$\int_0^{100} = -\frac{100^5}{6} + \frac{100^{-3}}{2} + \frac{100^5}{5} - \frac{100^{-3}}{3} \sim 333'333'333$$

$$\int_{20}^{100} = \sim 332'800'000$$

Die Werte für die Besselkoeffizienten der Zinsfüsse 3½ und 4 % finden sich in Tabelle VII (siehe folgende Seite).

Bedenken wir, dass bei der Tafel S. M. 1901—1910 3½% bei Berücksichtigung der Bedingung $l_0 = 1$ gilt:

$$N_0 = 20{,}67339 \qquad N_{20} = 8{,}45067$$

so sehen wir, dass wir noch viel mehr Glieder der alternierenden Entwicklung berücksichtigen müssen, um eine anständige Genauigkeit

Tabelle VII: $J^n(z)$

Zinsfuss	4 %	3½ %
	— 0,0784412	— 0,0688026
0	0,9984623	0,9988170
1	— 0,0391904	— 0,0343809
2	0,0007688	0,0005915
3	— 0,0000101	— 0,0000068
4	0,0000001	0,0000001

zu erhalten. Da bei wachsendem n die Besselkoeffizienten der Fakultät wegen sehr rasch abnehmen, während die Summen nur um höchstens das 100fache zunehmen, so werden die Produkte von einer gewissen Stelle an sehr schnell verschwindend klein. Diese Tatsache folgt schon aus der Konvergenz der Reihe. Das Bestimmen der Besselfunktionen ist bei diesen kleinen Argumenten, der guten Reihenkonvergenz wegen, eine einfache Sache. Dagegen gibt das Aufstellen dieser vielen höheren Summen $B_x^{(n)}$ sehr viel zu rechnen. Aus diesen Gründen ist die Lösung des Zinsfussproblems nach dieser Methode *praktisch undurchführbar*.

In der Versicherungsmathematik sind eine ganze Reihe von Näherungsformeln zur Lösung des Zinsfussproblems bekannt (18). Durchgehen wir sie, so finden wir, dass die meisten von ihnen hergeleitet wurden, ohne ein bestimmtes Absterbegesetz vorauszusetzen. (meist werden die Kommutationszahlen verwendet). Alle diese Beziehungen sind somit sofort für unser Gumbelsches Gesetz anwendbar, falls D_x, N_x, C_x und M_x so wie die höheren Summen S_x und R_x bekannt sind. Sie liefern auch hier Näherungsresultate, alle andern müssen speziell untersucht werden. Ob dabei Makeham oder Gumbel rein theoretisch die besseren Resultate liefert, hängt von der Anpassung der höheren Summen an Parabeln höheren Grades ab.

Beim Makehamschen Gesetz wird das Zinsfussproblem durch die theoretisch interessante Beziehung von Hochard gelöst (19). Hochard zeigt, dass die Leibrente zum Zinsfuss i' gleich der Verbindungsrente von N gleichaltrigen Personen zum Zinsfuss i ist. Also:

$$a'_{x:\overline{n}|} = a^{(N)}_{z,z\ldots:\overline{n}}$$

Dabei müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$N = 1 + \frac{\delta - \delta'}{ln\, s} \qquad z = x - \frac{ln\, N}{ln\, c}$$

wo δ und δ' Zinsintensitäten, s und c Konstanten der Absterbeordnung bedeuten.

Für die kontinuierliche Leibrente gilt die analoge Beziehung. Wir untersuchen nun, ob beim Gumbelschen Gesetz ebenfalls ein solch einfacher Zusammenhang existiert. Wir gehen dabei von der Formel für die Erlebensfallversicherung und vom Gumbelschen Gesetz in folgender Form aus:

$$l_x = k\, s^{x+\mathring{e}_x}\, g^{\left(\frac{x+\mathring{e}_x}{2}\right)^2}$$

Für die Überlebenswahrscheinlichkeit gilt:

$${}_tp_x = s^{t+\mathring{e}_{x+t}-\mathring{e}_x}\, g^{\frac{2tx+2x\left(\mathring{e}_{x+t}-\mathring{e}_x\right)+2t\,\mathring{e}_{x+t}+t^2+\mathring{e}^2_{x+t}-\mathring{e}^2_x}{2}}$$

und für die Wahrscheinlichkeit, dass die Personenverbindung nach Jahren noch besteht:

$${}_tp^{N)}_{z,z\ldots} = s^{N\left(t+\mathring{e}_{z+t}-\mathring{e}_z\right)}\, g^{N\frac{2tz+2t\left(\mathring{e}_{z+t}-\mathring{e}_z\right)+2t\,\mathring{e}_{z+t}+t^2+\mathring{e}^2_{z+t}-\mathring{e}^2_z}{2}}$$

Die Erlebensfallversicherungen erhalten die Werte:

$${}_tE_x = v^t\ {}_tp_x \qquad {}_tE^{(N)}_{z,z\ldots} = v^t\ {}_tp^{(N)}_{z,z\ldots}$$

Betrachten wir die Erlebensfallversicherung auf eine Person zu einem Zinsfuss i', so folgt die Beziehung:

$${}_tE'_x = v^t \left(\frac{v'\,s}{v}\right)^t s^{\mathring{e}_{x+t}-\mathring{e}_x}\, g^{\frac{2tx+2x\left(\mathring{e}_{x+t}-\mathring{e}_x\right)+2t\,ex+t+t^2+\mathring{e}^2_{x+t}-\mathring{e}^2_x}{2}}$$

Soll nun gelten: $\qquad {}_tE'_x = {}_tE^{(N)}_{z,z\ldots}$

so bedingt das:

$$\left(\frac{v'\,s}{v}\right)^t s^{\mathring{e}_{x+t}-\mathring{e}_x} = s^{N\left(t+\mathring{e}_{x+t}-\mathring{e}_z\right)}$$

und:

$$2tx + 2x\left(\mathring{e}_{x+t} - \mathring{e}_x\right) + 2t\mathring{e}_{x+t} + t^2 + \mathring{e}^2_{x+t} - \mathring{e}^2_x =$$
$$= N\left[2tz + 2z\left(\mathring{e}_{z+t} - \mathring{e}_z\right) + 2t\mathring{e}_{z+t} + t^2 + \mathring{e}^2_{z+t} - \mathring{e}^2_z\right]$$

Daraus ersehen wir, dass z und N ganz komplizierte Funktionen von t erfüllen. Beim Makehamschen Gesetz sind sie von t unabhängig, und deshalb ist der Übergang von der Erlebensfallversicherung zur Leibrente gültig. Beim Gumbelschen Gesetz kürzt sich der Parameter t nicht weg. *Eine ähnliche Darstellung, wie sie Hochard beim Makehamschen Gesetz gibt, ist somit unmöglich.*

Eine Lösung des Zinsfussproblems nach dieser Methode von Hochard ist nicht einmal beim gewöhnlichen Gaussschen Fehlergesetz durchführbar, was man sofort einsehen kann. Es ist:

$$l_x = k\, s^x\, g^{\frac{x^2}{2}}$$

Verlangen wir:

$${}_tE'_x = {}_tE^{(N)}_{z,\,z\ldots}$$

so muss gelten:

$$N = r + \frac{\delta - \delta'}{ln\, s} \qquad 2\,t\,x + t^2 = N\,(2\,t\,z + t^2)$$

also: $$z = f\,(t)$$

Die Variable t kürzt sich wieder nicht weg und die Erweiterung auf die Leibrente ist nicht möglich.

Zusammenfassend können wir sagen, dass das Zinsfussproblem beim Gumbelschen Gesetz nicht auf einfachere Weise gelöst wird als beim Makehamschen.

8. Herleitung verschiedener Versicherungswerte einer beliebigen Gumbelschen Absterbeordnung aus dem vollständigen System einer Standardtafel.

Gram (20) und Blaschke (21), (22) betrachteten die Beziehungen zwischen den kontinuierlichen Leibrentenbarwerten zweier verschiedener Makehamscher Absterbeordnungen. Saxer (23) hat ihre Resultate erweitert und findet folgendes allgemein gültiges Verknüpfungsgesetz:

Sind irgend zwei Absterbeordnungen derart gebaut, dass die Gleichung:

I $$\mu_2\,(x_2) = \frac{\mu_1\,(x_1)}{m} + r$$ erfüllt ist, wo $\mu_1\,(x_1)$

die Sterbensintensität des ersten, $\mu_2(x_2)$ die des zweiten Absterbegesetzes, x_1, x_2 die Alter und m, n, r beliebige Konstanten bedeuten; so gilt:

II $$a_2(x_2\,\delta_2) = m\,\bar{a}_1(x_1\,\delta_1)$$

unter der Voraussetzung, dass die Verzinsungsintensitäten der Beziehung gehorchen:

III $$\delta_2 = \frac{\delta_1}{m} - r$$

und $$x_2 = m\,x_1 + n \quad \text{ist.}$$

Umgekehrt sind Gleichungen II und III erfüllt, so folgt daraus notwendigerweise die Gültigkeit der Gleichung I, die Absterbeordnungen sind also gleicher Art (gleich gebaut).

Saxer hat zuerst gezeigt, dass die drei Transformationsgleichungen:

$$x_2 = m\,x_1 + n$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{m} - r$$

$$\bar{a}_2(x_2\,|\delta_2) = m\,\bar{a}_1(x_1\,|\delta_1)$$

die Verwirklichung einer dreiparametrigen kontinuierlichen Gruppe mit den Parametern m, n, r sind. Christen (11) hat diese Gruppe im Fall des Makehamschen Gesetzes eingehend erläutert; wir wollen hier das analoge im Fall des Gumbelschen Gesetzes tun.

Zunächst muss man zeigen, dass der Satz von Saxer anwendbar ist. Wir betrachten zwei Gumbelsche Absterbegesetze; sie seien durch die Konstanten τ_1, H_1 und τ_2, H_2 charakterisiert. Mit dem Index 1 bezeichnen wir immer das erste, mit 2 das zweite Absterbegesetz. m und n werden so gewählt, dass gilt:

$$u_1 = u_2$$

daraus folgt:

$$m = \frac{\tau_2}{\tau_1} \qquad n = H_2 - \frac{\tau_2}{\tau_1} H_1$$

und die Bedingung $\mu_2(x_2) = \frac{\mu_1(x_1)}{m} + r$ ist erfüllt, wenn $r = 0$ ist.

Unsere Gleichungen I und III bestehen; deshalb müssen auch die Beziehungen II gültig sein. *Es ist damit gezeigt, dass wir mit Hilfe eines vollständigen Leibrentensystems einer Gumbelschen Standardtafel für eine beliebige Gumbelsche Absterbeordnung und einen beliebigen Zinsfuss die Leibrentenbarwerte durch zweimalige Interpolation dieser Standardtafel bestimmen können.*

Wir wollen nun beweisen, dass die drei Transformationsgleichungen:

$$x_2 = m\, x_1 + n$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{m}$$

$$\bar{a}_2\,(x_2\,\delta_2) = m\,\bar{a}_1\,(x_1\,\delta_1)$$

geschrieben in der Form:

$$x_1' = m\, x_1 + n$$

$$x_2' = \frac{x_2}{m}$$

$$x_3' = m\, x_3$$

eine Gruppe bilden. Dazu betrachten wir die Gruppenpostulate.

1. Führen wir zwei Transformationen $x \rightarrow x'$ und $x' \rightarrow x''$ nacheinander aus, so erhalten wir eindeutig drei Transformationen $x \rightarrow x''$ von der obigen Form.

2. Das assoziative Gesetz ist erfüllt.

3. Es existiert eine identische Transformation (Einheitselement); die Parameter nehmen die Werte an $m = 1$ und $n = 0$.

4. Es gibt zu jeder Transformation eine inverse. Wenn m und n die Parameter der Transformation sind, so werden die Parameter der inversen:

$$m' = \frac{1}{m} \qquad \text{und} \qquad n' = -\frac{n}{m}$$

Wir untersuchen den Fall, wo die Konstanten der beiden betrachteten Gumbelschen Gesetze sich unendlich wenig voneinander unterscheiden. Die Parameter der Gruppe erhalten dann die Form:

$$m = 1 + d\,m \qquad\qquad n = dn$$

und die infinitesimale Variation der Elemente ergibt, unter Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1\,dm + dn = (x_1\,e_1 + e_2)\,dt \\ dx_2 &= -\,x_2\,dm \quad\;\; = (-\,x_2\,e_1)\,dt \\ dx_3 &= x_3\,dm \quad\;\; = x_3\,e_1\,dt \end{aligned}$$

Die zweite Darstellung ist eine Parameterform. Von nun an verwenden wir die Symbolik der infinitesimalen Transformationen und betrachten die Funktionen von der Form $F = F(x_1\,x_2\,x_3)$, wo x_1, x_2, x_3 die Variablen sind. Es ist:

$$\begin{aligned} dx_1 &= X_1\,dt \\ dx_2 &= X_2\,dt \\ dx_3 &= X_3\,dt \end{aligned}$$

Aus dem vollständigen Differential:

$$dF = \frac{dF}{dx_1}\,dx_1 + \frac{dF}{dx_2}\,dx_2 + \frac{dF}{dx_3}\,dx_3$$

erhält man durch Einsetzen:

$$\frac{dF}{dt} = X_1\frac{dF}{dx_1} + X_2\frac{dF}{dx_2} + X_3\frac{dF}{dx_3} = \mathfrak{X}F$$

Man bezeichnet $\mathfrak{X}F$ als linearen Differentialoperator; vom gruppentheoretischen Standpunkt aus ist er die allgemeine infinitesimale Operation. Durch weiteres Einsetzen erhalten wir:

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{X}F = e_1\left[x_1\frac{dF}{dx_1} + x_3\frac{dF}{dx_3} - x_2\frac{dF}{dx_2}\right] + e_2\frac{dF}{dx_1}$$

Diese Gleichung stellt die allgemeine infinitesimale Variation der Funktion $F(x_1\;x_2\;x_3)$ dar. Nach einem Satze der Gruppentheorie lässt sich jede infinitesimale Operation einer n-parametrigen Gruppe in eine lineare Kombination von n unabhängigen infinitesimalen Operationen zerlegen. In unserem Falle erkennen wir für die Gruppe sofort zwei unabhängige, infinitesimale Operationen, nämlich:

$$\mathfrak{X}_1 F = x_1\frac{dF}{dx_1} + x_3\frac{dF}{dx_3} - x_2\frac{dF}{dx_2}$$

$$\mathfrak{X}_2 F = \frac{dF}{dx_1}$$

Aus einer linearen Kombination der letzten Gleichungen oder aus der Fundamentalgleichung [α] erhalten wir durch Integration alle Spezialfälle der Transformationsgleichungen für die Funktionen $F(x_1\ x_2\ x_3)$ in endlicher und elementarer Form. In der Relation [α] sind also sämtliche zwischen Gumbelschen Absterbeordnungen möglichen Beziehungen der Funktionen

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = F(x, \delta, a)$$

als Spezialfälle enthalten.

Z. B. bekommen wir unsere Ausgangsgleichungen durch Integration sofort, wenn wir für F nacheinander x_1, x_2, x_3 setzen.

Der analytische Aufbau der Gleichungen für die infinitesimalen Operationen lässt folgende geometrische Deutungen der allgemeinen Transformationen zu. Betrachten wir den dreidimensionalen Raum mit den Koordinaten x_1 Alter, x_2 Zinsintensität und x_3 kontinuierliche Leibrente, so bewirkt die Operation $\mathfrak{X}_2 F$ eine Translation längs der Altersaxe, und $\mathfrak{X}_1 F$ eine Homothetie, die sich in der Richtung aller Axen auswirkt. Dieses Resultat können wir schon aus unseren ersten fundamentalen Transformationsgleichungen herauslesen. Die vollständigen kontinuierlichen Leibrentensysteme aller denkbaren Gumbelschen Absterbegesetze sind durch eine zweiparametrige kontinuierliche Gruppe miteinander verknüpft, während beim Makehamschen Gesetz eine dreiparametrige Gruppe notwendig ist.

Wir kehren nun zu unseren ursprünglichen Transformationsgleichungen zurück und betrachten den Spezialfall, wo $m = 1$ ist, also $\tau_1 = \tau_2$.

Unsere Gleichungen erhalten die Form:

$$x_2 = x_1 + n$$
$$\delta_2 = \delta_1$$
$$\bar{a}_2(x_2\ \delta_2) = a_1(x_1\ \delta_1)$$

und es ist:

$$l_{x_2} = l_{x_1+n}$$

Die Leibrentenbarwerte zweier Gumbelschen Gesetze, die sich nur in der Konstanten H unterscheiden, lassen sich durch eine reine

Altersverschiebung ineinander überführen. Diese Betrachtung gilt auch für die diskontinuierliche Methode. Damit erhalten die Ausführungen des Abschnittes 3, Kapitel IV, die spekulativ aus der graphischen Darstellung verschiedener Absterbeordnungen gefolgert wurden, eine gewisse mathematische Begründung. Der Tabelle VIII (von Gumbel berechnet) entnehmen wir folgendes:

Tabelle VIII.

Sterbetafel	τ	H
Indien M. 1901—1910	32,44973	4,63456
Indien W. 1901—1910	32,36553	5,93413
Neger M. Columb. 1901—1910 .	31,13508	14,06829
Neger M. O. R. St. 1901	33,22100	18,17254
Neger M. O. R. St. 1910	30,41530	22,20807
Neger W. O. R. St. 1910	29,70123	27,21229
Deutsches Reich M. 1891—1900 .	31,79392	29,42229
U. S. A. M. und W. 1901	23,08420	44,05798
Textbook	14,30690	58,19861

Unsere Absterbeordnungen für verschiedene Bevölkerungen, Zeiten und Geschlechter unterscheiden sich hauptsächlich durch die Konstante H. Die Konstante τ bleibt nahezu fest, mit Ausnahme der Tafel U. S. A. M. 1901 und der des Textbook. Für die übrigen nach Gumbel ausgeglichenen Absterbeordnungen wird die in Abschnitt 3 dieses Kapitels gegebene Näherungsform für die Kommutationszahl N_x gute Resultate liefern.

Um für die diskontinuierlichen Leibrentenbarwerte ähnliche Relationen zu finden wie für die kontinuierlichen, verwenden wir die Formel von Woolhouse. Diese Formel ist eine Näherungsbeziehung; das Restglied wird vernachlässigt. Sie lautet:

$$\bar{a}_x = a_x^{(p)} + \frac{1}{2p} - \frac{\mu_x + \delta}{12\,p^2}$$

oder speziell:

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12} \text{ für } p = 1$$

Betrachten wir zwei Gumbelsche Absterbegesetze, so erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$a_{x_1} + \frac{1}{2} = \overline{a}_{x_1} + \frac{\mu_{x_1} + \delta_1}{12}$$

$$a_{x_2} + \frac{1}{2} = \overline{a}_{x_2} + \frac{\mu_{x_2} + \delta_2}{12}$$

Berücksichtigen wir weiter:

$$x_2 = m\, x_1 + n \qquad \overline{a}_{x_2} = m\, \overline{a}_{x_1}$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{m} \qquad \mu_{x_2} = \frac{\mu_{x_1}}{m}$$

und wenden wieder die Woolhousesche Formel an, so ergibt sich:

$$a_{x_2} + \frac{1}{2} = m\left(a_{x_1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\mu_{x_1} + \delta_1 - m^2\,\mu_{x_1} - m^2\,\delta_1}{12\,m}$$

In diesem Resultat ist nur der Fehler enthalten, der durch die Woolhousesche Formel als Näherungsbeziehung bedingt ist. Vernachlässigen wir in obiger Entwicklung das zweite Glied, so bekommen wir als weitere Annäherung:

$$a_{x_2} + \frac{1}{2} = m\left(a_{x_1} + \frac{1}{2}\right)$$

Durch eine einfache Überlegung können wir hier noch eine Beziehung zwischen den temporären kontinuierlichen Leibrenten zweier Gumbelscher Gesetze herleiten. Gram hat die analoge Formulierung für das Makehamsche Absterbegesetz gegeben. Die Überlebensordnungen seien durch die Konstanten τ, H und τ', H' charakterisiert. Zur Berechnung der Versicherungswerte benützen wir bei der ersten den Abzinsfaktor v, bei der zweiten v'. Damit erhalten wir:

$$\overline{a}_x = \tau\, v^{H-x}\, e^{\frac{u^2}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[2^{\frac{n}{2}} \left(Q_u\left(\frac{n}{2}+1\right) - Q_{u_1}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right) + \right.$$

$$\left. + 2^{\frac{n}{2}-1} \left(Q_u\left(\frac{n}{2}\right) - Q_{u_1}\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right] J^n\,(2\,\tau\,\mathrm{Log}\,v)$$

$$|_s\bar{a}'_z = \tau' v'^{H'-z} e^{\frac{u'^2}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n \left[2^{\frac{n}{2}} \left(Q_{u'}\left(\frac{n}{2}+1\right) - Q_{u'_1}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right) + \right.$$

$$\left. + 2^{\frac{n}{2}-1} \left(Q_{u'}\left(\frac{n}{2}\right) - Q_{u'_1}\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right] J'^n (2\tau' \operatorname{Log} v')$$

Die Richtigkeit dieser Formel ist leicht einzusehen. Die Q-Funktionen der Grenzen u_1 und u'_1 bedingen den Übergang von der lebenslänglichen zur temporären Leibrente. Aus früherem folgt für:

$$u = u' \quad \text{gleich} \quad z = m\,x + n$$

und für: $J^n = J'^m$ ergibt sich die Gleichung $\delta' = \dfrac{\delta}{m}$.

Verlangen wir weiter: $u_1 = u'_1$

so erhalten wir: $s = m\,q$

Unter der Voraussetzung dieser drei Bedingungen ergibt sich für die temporäre Leibrente die Beziehung:

$$|_s\bar{a}'_z = m\,|_q\bar{a}_x$$

Falls die Werte $|_q\bar{a}_x$ bei einer Anzahl von Zinsfüssen für die ganzzahligen Alter x und Dauern q bekannt sind, lässt sich $|_s\bar{a}'_z$ näherungsweise berechnen. Eine dreimalige Interpolation ist dazu notwendig. Gehen wir von der temporären zur lebenslänglichen Leibrente über, so erhalten wir wieder unsere früheren Beziehungen, und für die numerische Ausrechnung ist dann nur noch eine zweifache Interpolation notwendig (q und s werden beide unendlich).

Sind die Relationen:

$$\delta' = \frac{\delta}{m} \qquad z = m\,x + n$$

$$r = m\,p$$

erfüllt, so folgt für die aufgeschobene Leibrente:

$$_{r|}\bar{a}'_z = m\,{}_{p|}\bar{a}_x$$

und gilt weiter: $s = mq$, so erhalten wir für die aufgeschobene, temporäre Leibrente:

$$_{r|s}\bar{a}'_z = m\,{}_{p|q}a_x$$

Im letzten Falle wäre zur numerischen Ausrechnung die vierfache Interpolation einer Tabelle notwendig. Die beiden letzten Verknüpfungen sind auf analoge Weise beim Makehamschen Gesetz herleitbar.

Weiter erkennen wir sofort, dass die Beziehungen zwischen den temporären kontinuierlichen Leibrenten und ihren Bedingungsgleichungen für alle Gumbelschen Absterbefunktionen durch eine zweiparametrige kontinuierliche Gruppe im vierdimensionalen Raum zusammenhängen. Das gleiche gilt für die aufgeschobene Leibrente, während bei der aufgeschobenen temporären die zweiparametrige Gruppe sich im fünfdimensionalen Raum auswirkt. Beim Makehamschen Gesetz liegt die Sache analog, nur ist die notwendige Gruppe immer dreiparametrig.

V. Kapitel.

Zusammenfassung der Resultate.

In der vorliegenden Arbeit wurde das Gumbelsche Gesetz untersucht in bezug auf seine Verwendung als Absterbegesetz in der Versicherungsmathematik. Zunächst wurde gezeigt, dass diese neue Überlebensfunktion, wie das meistens verwendete Makehamsche Gesetz, eine reine Ausgleichungsformel ist, die kausal die Ursachen des Lebens und Sterbens nicht erfassen kann. Im weitern wurde das Gumbelsche Gesetz nach folgenden drei Hauptpunkten untersucht:

1. Parameterbestimmung.
2. Erfassung der Gesetzmässigkeit des Lebens und Sterbens.
3. Mathematische Behandlung von Versicherungsproblemen.

Wo es notwendig erschien, wurde der Vergleich mit dem Makehamschen Gesetz durchgeführt. Wir finden folgende Resultate:

Die Bestimmung der Konstanten des Gumbelschen Gesetzes ist nach der angegebenen Methode durchaus möglich, und wir können von diesem Standpunkt aus nichts gegen dieses Absterbegesetz einwenden.

Aus den beiden durchgerechneten Beispielen geht klar hervor, dass das Gumbelsche Gesetz den Verlauf der Absterbeordnung wesentlich schlechter wiedergibt, als es das Makehamsche Gesetz tut. Die Gumbelsche Funktion erfasst die Gesetzmässigkeit des Lebens und Sterbens immer nur in grossen Zügen, ist also für die praktische

Verwendung in der Versicherungsmathematik als ungeeignet zu betrachten.

Dem IV. Kapitel entnehmen wir, dass nur wenige Versicherungsfunktionen beim Gumbelschen Gesetz eine einfachere Form erhalten als beim Makehamschen, nämlich die Summenfunktion der Lebenden, die Summenfunktion der Summenfunktion der Lebenden, das durchschnittliche Alter der Lebenden in der stationären Bevölkerung, die mittlere künftige Lebenserwartung, sowie die Darstellung der Absterbeordnung mittels Q-Funktionen. Ebenfalls weniger kompliziert werden die Beziehungen zwischen den vollständigen Leibrentensystemen verschiedener Gumbelscher Überlebensordnungen, doch ist diese Vereinfachung vom praktischen Standpunkte aus unwesentlich. Dagegen ergibt sich für das Zinsfussproblem keine bequeme Lösung; nicht einmal die theoretisch interessante und beim Makehamschen Gesetz gültige Beziehung von Hochard ist erfüllt. Eine ganz bedeutend kompliziertere Form erhält das wichtige Leibrentenproblem; und das Verbindungsrentenproblem kann beim Gumbelschen Gesetz im Gegensatz zum Makehamschen überhaupt allgemein nicht gelöst werden, da das Gesetz des gleichmässigen Alterns hier nicht erfüllt ist. Wir sehen aus dieser Betrachtung, dass gerade die in der Versicherungsmathematik als schwierig bekannten Probleme beim Gumbelschen Gesetz bedeutend kompliziertere Lösungen erhalten, als es beim Makehamschen Gesetz der Fall ist.

Aus allen diesen Tatsachen stellen wir fest, dass das Makehamsche Gesetz für die Versicherungspraxis wesentlich vorteilhafter als das Gumbelsche ist und dass deshalb das letztere kaum je praktische Verwendung finden dürfte.

Immerhin stellen die Gumbelschen Arbeiten einen interessanten Versuch dar, den rätselvollen Vorgang der menschlichen Sterblichkeit in das Gebäude der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzugliedern und mit andern Zufallsgesetzen in einen harmonischen Zusammenhang zu bringen.

Literaturzusammenstellung.

1. *E. J. Gumbel:* Das Zufallsgesetz des Sterbens. Bericht des math. Kongresses in Bologna 1928.
2. *E. J. Gumbel:* Das Zufallsgesetz des Sterbens. Deutsches statistisches Zentralblatt, Heft 12, 1932.
3. *H. Steiner-Stoss:* Der Einfluss der Lungentuberkulose auf die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung 1901—1910. M.V.V.[1]), Heft 20.
4. *H. Wyss:* Die Krebssterblichkeit in der Schweiz. M. V. V., Heft 22.
5. *Ch. Moser:* Intensitätsfunktionen. Vorlesung W.-S. 1929/30; unveröffentlicht.
6. *E. J. Gumbel:* La distribuzione dei decessi secondo la legge di Gauss. Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari anno III, 1932.
7. *F. Eggenberger:* Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. M. V. V., Heft 19.
8. Textbook de l'Institut des Actuaires de Londres, 1894.
9. *Glover:* United States Life Tables 1890, 1901, 1910 and 1901—1910.
10. *S. Dumas:* Le contrôle de la mortalité. M. V. V., Heft 21.
11. *H. Christen:* Beziehungen zwischen den Versicherungsbarwerten zweier verschiedener Makehamscher Überlebensordnungen. Festschrift Moser 1931.
12. *F. Kobi:* Untersuchungen über die Sterblichkeitsänderung, wenn die Überlebensordnungen das Makehamsche Gesetz befolgen, mit besonderer Berücksichtigung schweizerischer Verhältnisse. Festschrift Moser 1931.
13. *W. Friedli:* Ausgewählte versicherungswissenschaftliche Kapitel. Vorlesung W.-S. 1931/32; unveröffentlicht.
14. *W. Thalmann:* Zahlenwerte der Prymschen Funktion zur Berechnung von Rentenbarwerten. M. V. V., Heft 26.
15. *Ch. Moser:* Die Makehamsche Funktion. Vorlesung S.-S. 1931; unveröffentlicht.
16. *A. Quiquet:* Représentation algébrique des tables de survie. Généralisation des lois de Gompertz, de Makeham, etc. Bulletin de l'Inst. des Actuaires Français, Bd. IV, Heft 14.
17. *H. Broggi:* Versicherungsmathematik. Leipzig und Berlin 1911.
18. *H. Christen:* Das Zinsfussproblem bei der Leibrente. M. V. V., Heft 25.
19. *M. Hochard:* Note sur le changement du taux d'intérêt dans le calcul des annuités viagères. Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires Français 1925.

[1]) M.V.V. bedeutet «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker».

20. *J. P. Gram:* Om Makehams Dodelighedsformel og dens Anvendelse paa ikke normale liv. Aktuaren 1904.

21. *E. Blaschke:* Über eine Anwendung des Sterbegesetzes von Gompertz-Makeham. Mitteilungen des Verbandes der österreichischen und ungarischen Versicherungstechniker 1903.

22. *E. Blaschke:* Die Todesursachen bei österreichischen Versicherten nach fünfjährigen Geschäftsperioden im Zeitraume 1876—1900. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen 1914.

23. *W. Saxer:* Über die Konstruktion einer Standardabsterbeordnung. M. V. V., Heft 19.

Weiter wurden verwendet:

W. Friedli: Krankenversicherung (Abschnitt über Besselfunktionen). Vorlesung 1932/33; unveröffentlicht.

W. Scherrer: Kontinuierliche Gruppen. Vorlesung W.-S. 1932/33; unveröffentlicht.

J. H. Graf und *E. Gubler:* Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen. Erstes Heft: Die Besselsche Funktion erster Art. Bern, Druck und Verlag K. J. Wyss, 1898.

N. Nielsen: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig, Teubner, 1906.

Lebenslauf.

Am 17. Oktober 1910 in Zimmerwald geboren, trat ich im Frühjahr 1917 in die Primarschule in Belp, dem damaligen Wohnsitz meiner Eltern, ein. Nach 4 Jahren besuchte ich ein Jahr lang die Sekundarschule in Belp, worauf die Aufnahme ins städtische Progymnasium in Bern erfolgte. Drei Jahre später trat ich in die Realschule des städtischen Gymnasiums über. Nach bestandener Realmaturität im Herbst 1929 immatrikulierte ich mich an der hiesigen Universität, wo ich versicherungswissenschaftlichen, mathematischen und nationalökonomischen Studien oblag.

Bern, den 18. Dezember 1933. *H. Streit.*